

**IB 124-2004/15**

**Anwendung eines Transitions-/Turbulenzmodells zur  
numerischen Simulation von Strömungen mit Transition**

**Lars Reimer**

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V.  
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik  
Abteilung Numerische Verfahren  
Lilienthalplatz 7, D-38108 Braunschweig

Stufe der Zugänglichkeit: I

Braunschweig, Mai 2004

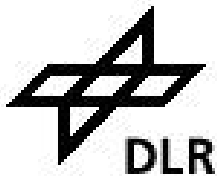
Institutsdirektor:  
Prof. Dr.-Ing. habil. C.-C. ROSSOW

Verfasser:  
cand.-Ing. L. REIMER

Betreuer:  
Dr.-Ing. A. KRUMBEIN

Abteilungsleiter:  
Prof. Dr.-Ing. N. KROLL

Bericht enthält:  
160 Seiten  
113 Bilder  
29 Literaturstellen



Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V.  
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. habil. C.-C. Rossow

---

## Anwendung eines Transitions-/Turbulenzmodells zur numerischen Simulation von Strömungen mit Transition

vorgelegt von  
Lars Reimer  
als  
Studienarbeit

Betreuer: Dr.-Ing. A. Krumbein  
Referent: Prof. Dr.-Ing. W. Schröder  
Korreferent: Prof. Dr. N. Kroll

Braunschweig, den 11. Mai 2004

---

## Übersicht

Die vorliegende Arbeit dokumentiert die Erweiterung des Strömungslösers *FLOWer* um ein Transitionsschliessungsmodell. Dieses Modell verfolgt entgegen den bisher gängigen, in ingenieurnahen Anwendungen eingesetzten Methoden einen alternativen Transitionsmodellierungsansatz. Das Modell nutzt die Beschreibungsmethoden, die gewöhnlich in turbulenten Strömungsbereichen zur Modellierung der zeitlichen Entwicklung dort auftretender, turbulenter Schwankungsgrößen eingesetzt werden, auch in nicht-turbulenten Strömungsbereichen. Dort wird mit Hilfe der klassischen, turbulenten Beschreibungsmethode die zeitliche Entwicklung nicht-turbulenter Schwankungserscheinungen modelliert. Dortige Schwankungen sind es, die als Störungen des rein laminaren Strömungszustandes den Übergang zur turbulenten Strömungsform einleiten. Mit Beschreibungsmethoden sind hier Turbulenzmodelle auf der Basis von Transportgleichungsansätzen gemeint. Die Bestimmung des Übergangs von nicht-turbulenter zu turbulenter Strömungsform und die Beschreibung des Übergangs ist lediglich als Teil des eigentlichen Lösungsprozesses für das gesamte Strömungsfeld zu betrachten. Denn das Einsetzen der Turbulenz ist durch ein starkes Ansteigen nicht-turbulenter Schwankungserscheinungen gekennzeichnet und als solches im Lösungsprozess bestimmbar.

Der Löser *FLOWer* basiert auf einem blockstrukturierten Finite-Volumen-Verfahren und integriert die nach Reynolds und Favre gemittelten Navier-Stokesschen Gleichungen für dreidimensionale Strömungen thermisch und kalorisch perfekter Gase.

Das Transitionsschliessungsmodells ist als Kopplung mit dem  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell nach Wilcox implementiert. Dieses Turbulenzmodell ist bereits implementierter Bestandteil des Lösers. Die Arbeit umfasst die Dokumentation sowohl der geeigneten Programmmodule zur Implementierung der benötigten Modellgleichungen als auch der eigentlichen Implementierung. Das Verfahren wird an Hand einer annähernd inkompressiblen transitionellen ebenen Platteströmung im Vergleich mit Ergebnissen aus Versuchen von Schubauer und Klebanoff für eben diesen Strömungsfall validiert. Als weiterer Fall dient die Simulation der transitionellen Umströmung eines Laminarprofils zur Verfahrensvalidierung. Einerseits wird die Fähigkeit des Verfahrens zur Transitionsbeschreibung, also der Simulation bei vorgegebender Transitionslage, als auch die der Transitionsvorhersage untersucht.

Die durchgeführten Untersuchungen führen zu dem Ergebnis, dass man insgesamt die Transitionsmodellierungseigenschaft, also die Fähigkeit des Modells in einem Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Code sowohl laminare und transitionelle als auch turbulente Strömungsbereiche auf physikalischer Grundlage wiederzugeben, als gut bezeichnen kann. Die Verwendung des Modells gestattet die Simulation laminarer und transitioneller Strömungsbereiche, ohne dass man auf die artifizielle Methode der Manipulation der Wirbelviskosität in laminaren Bereichen oder auf die Wirkung der nu-

merischen Dissipation zur Wiedergabe von künstlich erzeugten Transitiongebieten im Rahmen der Punkttransition angewiesen ist.

Die Eigenschaft des Modells die Transitionslagen vorherzusagen, hat sich im Rahmen der bisher durchgeführten Untersuchungen jedoch als mangelhaft erwiesen.

---

# Inhalt

<b>Notationen</b>	VIII
<b>Abbildungen</b>	XIV
<b>Tabellen</b>	XX
<b>1 Einleitung</b>	1
1.1 Motivation	1
1.2 Zielsetzung	2
<b>2 Kontinuumsmechanische Bewegungsgleichungen Newtonscher Fluide</b>	4
2.1 Bilanzgleichungen in integraler Formulierung	4
2.2 Stoffeigenschaften	5
<b>3 Theoretische Grundlagen der Berechnung transitioneller Strömungen</b>	7
3.1 Störungsentwicklung in der Plattengrenzschicht	7
3.1.1 Abhängigkeiten von der lokalen Reynolds-Zahl	9
3.1.2 Einfluss des Turbulenzgrades	10
3.2 Grundzüge turbulenter Strömungen	11
3.2.1 Schichtenstruktur wandgebundener Turbulenz	12
3.2.2 Widerstandsgesetz der längsangeströmten Platte	13
3.2.3 Grundgleichungen für die mittlere Bewegung turbulenter Strömungen	15
3.2.4 $k$ - $\omega$ -Zweigliederturbulenzmodell	18
3.2.5 Intermittenzverteilung beim Transitionsprozess	20
<b>4 Modellspezifische Grundgleichungen des kombinierten Turbulenz- und Transitionsansatzes</b>	25
4.1 Modelltransformation in $k$ - $\omega$ -Formulierung	26
4.2 Definitionen der signifikanten Störungsmoden	30
4.3 Vorhersagekriterium des Transitionsbeginns	33
4.4 Strömungsgrößen des Grenzschichtrandes	33

<b>5</b>	<b>Approximative Lösung der kontinuumsmechanischen Bewegungsgleichungen</b>	
	<b>Newtonscher Fluide</b>	35
5.1	Räumliche Diskretisierung	35
5.2	Künstliche Dissipation	36
5.3	Zeitintegration	38
5.4	Konvergenzbeschleunigung	40
5.4.1	Lokale Zeitschritte	40
5.4.2	Implizite Residuenglättung	40
5.4.3	Mehrgittertechnik	40
5.5	Präkonditionierung	42
5.6	Transitionsbehandlung	42
5.7	Anfangs- und Randbedingungen	43
<b>6</b>	<b>Implementierung der kombinierten Turbulenz- und Transitionsmodellierung</b>	45
6.1	Infrastruktur der Turbulenzmodellierung in <i>FLOWer</i>	45
6.2	Infrastruktur der Transitions-/Turbulenz-Modellimplementierung	52
6.2.1	Modellsteuerung in <i>input</i>	52
6.2.2	Modellinitialisierung in <i>initial</i>	64
6.2.3	Modellberechnung in <i>solutn</i>	68
6.2.4	Modellpräparation in <i>solutn</i>	72
<b>7</b>	<b>Ergebnisse</b>	78
7.1	Ebene Plattenströmung	78
7.1.1	Plattenströmung ohne Transition	80
7.1.2	Plattenströmung mit Transition	88
7.1.3	Verhalten des modellspezifischen Transitionskriteriums der Plattenströmung	116
7.2	Laminarprofil	119
<b>8</b>	<b>Fazit</b>	130
<b>A</b>	<b>Strukturdiagramme der Modellimplementierung</b>	133
A.1	Veränderte Struktur der Routine <i>initgeom</i>	133
A.2	Struktur der Routine <i>ingeotm</i>	134
A.3	Veränderte Struktur der Routine <i>solutn</i>	136
A.4	Veränderte Struktur der Routine <i>solinit</i>	137
A.5	Veränderte Struktur der Routine <i>fluxes</i>	137
A.6	Struktur der Routine <i>preptm</i>	138
A.7	Struktur der Routine <i>prptt123</i>	139
<b>B</b>	<b>Inversion des Widerstandsgesetzes turbulenter Strömungen</b>	143
	<b>Literatur</b>	144
	<b>Index</b>	146

---

## Notationen

### Generelle Bezeichnungen

$a$	Skalierungsfunktion des Transitions-/Turbulenzmodells, $a = f(Tu_\infty)$
$A$	Konstante der Intermittenzfunktion nach Narasimha, $A = 0.412$
$A, B$	variabler Skalierungs- und Exponentialkoeffizient
$\alpha$	Skalierungsfaktor künstlicher numerischer Dissipation
$\alpha_s$	Skalierungsfaktor des Residuums eines Runge-Kutta Teilintegrationsschrittes
$b$	Skalierungsfaktor der zweiten Störungsmode im Transitions-/Turbulenzmodell
$\beta$	Gewichtungskoeffizient der viskosen Flüsse und der künstlichen Dissipation des Runge-Kutta Zeitintegrationsschemas
$\beta$	Faktor der impliziten Residuenglättung
$\beta^*, \beta$	Schliessungskoeffizienten des $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodells, Skalierung des Dissipationsterms, $\beta^* = 9/100$ , $\beta = 3/40$
$c_p, c_v$	isobare, isochore spezifische Wärmekapazität
$C_\kappa$	von-Kármán Konstante, $C_\kappa = 0.41$
$C^+$	Integrationskonstante im Gesetz der universellen Geschwindigkeitsverteilung und des Widerstands, $C^+ = 5.5$
$\overline{C}$	Integrationskonstante im Gesetz des universellen Widerstands, $\overline{C} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^1 \left( \frac{du^+}{d\eta} - \frac{1}{C_\kappa \eta} \right) d\eta$
$\check{C}$	Konstante des Transitionskriteriums $\check{C} = 0.09$
$C_{krit}$	Vergleichsgröße des Transitionskriteriums
$C_{CFL}$	Courant- oder CFL-Zahl
$C_r$	Phasengeschwindigkeit
$d$	orthogonaler Oberflächenabstand
$\underline{d}$	künstlicher numerischer Dissipationsflussvektor
$D$	Variable der Funktion $G(\Lambda; D)$ , $D = 2 \ln C_\kappa + C_\kappa (C^+ + \overline{C})$
DS	Dissipationsterm einer turbulenzmodellierenden Transportgleichung
$\underline{D}$	künstlicher Dissipationsoperator
DDADI	<i>diagonal dominant alternating direction implicit</i>
$\delta$	Grenzschichtdicke

$\delta_1$	Verdrängungsdicke, $\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(\eta)}{U_\infty}\right) d\eta$
$\delta_2$	Impulsverlustdicke, $\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u(\eta)}{U_\infty} \left(1 - \frac{u(\eta)}{U_\infty}\right) d\eta$
$e$	spezifische innere Energie
$E$	spezifische Totalenergie
$\underline{\underline{E}}$	Einheitstensor
$\varepsilon$	turbulente Dissipation
$\varepsilon$	Skalierungsfaktor zu $\eta_{\max}$ bei $F(\eta_{\max}) = F_{\max}$
$\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)}$	Skalierungsfaktor zweiter, vierter Differenzen im Rahmen der künstlichen numerischen Dissipation
$F$	Diagnosefunktion zur Bestimmung der Grenzschichtdicke
$\underline{F}$	approximierter Flusssichtevektor
$\underline{\underline{F}}$	Flussdichtetensor
$\mathcal{F}^{l,t}$	laminar/turbulente Strömungsstatusfunktion
$\underline{g}$	Zellseitenflächenflussdichte
$G$	Funktion des expliziten universellen Widerstandsgesetzes
$\underline{G}$	Repräsentant der konvektiven Flussdichte über eine Netzzelle
$\gamma$	Intermittenzfunktion
$h$	spezifische Enthalpie
$H$	spezifische Totalenthalpie
$\eta$	Oberflächennormale Koordinate der Diagnosefunktion
$i,j,k$	Indizes diskreter Netzknoten
$\mathcal{J}^f$	Gewichtungoperator der Mehrgittertechnik
$k_v^{(2)}, k_v^{(4)}$	Steuerungsparameter des Benutzers für die künstliche numerische Dissipation
$k$	translatorische kinetische Turbulenzenergie
$k_{k,p}$	Skalierungsfaktor des Produktionsterms der k-Transportgleichung
$k_{\omega,p}$	Skalierungsfaktor des Produktionsterms der $\omega$ -Transportgleichung
$K$	Wärmeleitungskoeffizient
$\varkappa$	Isentropenexponent $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$
$L$	Sehnenlänge
$L_T$	Transitionslänge
$\lambda$	Kenngroße der Transitionsausdehnung
$\Lambda$	Wellenlänge
$\Lambda$	Variable der Funktion $G(\Lambda; D)$ , $\Lambda = \ln \text{Re}_x$
$\mu_f$	dynamische Fluktuationsviskosität
$\mu_m$	dynamische molekulare Viskosität
$\mu_t$	dynamische, turbulente Wirbelviskosität
$\nu$	kinematische Viskosität
$\underline{n}$	normierter Oberflächennormalenvektor
$N$	Netz, Anzahl der Netzknoten
$\omega$	turbulente Dissipationsrate, turbulente Dissipation pro kinetischer Turbulenzenergie $\omega = \frac{1}{\beta^*} \frac{\varepsilon}{k}$
$\omega_{ts}$	Kreisfrequenz der Tollmien-Schlichting-Instabilität
$\underline{\underline{\Omega}}$	Norm des Wirbelvektors $\underline{\underline{\Omega}} = \sqrt{\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}}$



$\underline{\Omega}$	Wirbelvektor $\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v}$
$p$	Druck
$P$	Produktionsterm einer turbulenzmodellierenden Transportgleichung
$\underline{P}$	Residuumvektor
$\Psi$	Drucksenor im Rahmen der künstlichen numerischen Dissipation
$\underline{q}$	Wärmestromdichte
$\underline{Q}$	Quelltermvektor einer turbulenzmodellierenden Transportgleichung
$r, s$	krummlinige Oberflächenkoordinaten, entlang ( $s$ ) bzw. orthogonal ( $r$ ) zur Oberfläche
$\rho$	Dichte
$R, R^*$	spezielle, allgemeine Gaskonstante
$s_t$	Transitionsbeginn in Einheiten der Koordinate $s$
$s_T$	Transitionsende in Einheiten der Koordinate $s$
$\sigma^*, \sigma$	Schliessungskoeffizienten des $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodells, Skalierung der turbulenten Wirbelviskosität, $\sigma^* = 1/2$ , $\sigma = 1/2$
$S$	Norm des Dehnratentensors $S = \sqrt{\underline{S} : \underline{S}}$
$S^*$	Hauptdehnrate $S^* = 2S^2 - \frac{2}{3} \text{Sp}(\underline{S}) ^2$
$S$	Betrag der Zellseitenfläche
$\underline{S}$	Zellseitenflächenvektor mit dem Betrag der Zellseitenfläche
$\underline{\underline{S}}$	Dehnratentensor
$\mathcal{S}, d\mathcal{S}$	Fläche, infinitesimales Flächenelement
$t$	Zeit
$\Delta t$	diskrete Zeitschrittweite
$\tau$	turbulente Dissipationszeit
$T$	Temperatur
TS	Tollmien-Schlichting
$\underline{T}$	viskoser Spannungstensor
$\underline{\underline{T}}^*$	allgemeiner Spannungstensor
$\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}}$	Reynoldsspannungstensor $\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}} = \widetilde{\bar{\rho} v'' v''^T}$
$u, v, w$	Geschwindigkeitskomponenten der drei kartesischen Raumrichtungen
$U, V$	Norm des Geschwindigkeitsvektors
$\underline{U}$	Vektor der konservativen Variablen
$\underline{v}$	Vektor des Geschwindigkeitsfeldes
$\mathcal{V}, d\mathcal{V}$	Volumen, infinitesimales Volumenelement
$\xi, \eta$	normierte Koordinaten der Intermittenzfunktion
$\zeta$	rotatorische Turbulenzenergie

## Ähnlichkeitskennzahlen

Ma	Mach-Zahl, $\text{Ma} = \frac{V}{c_a}$
Pr	Prandtl-Zahl, $\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{K}$
Re	Reynolds-Zahl, $\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu}$
$\text{Re}_{\delta_1}$	Reynolds-Zahl gebildet mit Verdrängungsdicke $\delta_1$ und Grenzschichtrandgrößen

$Re_{\delta_2}$	Reynolds-Zahl gebildet mit Impulsverlustdicke $\delta_2$ und Grenzschichtrandgrößen
$Re_x$	Reynolds-Zahl gebildet mit der Oberflächenkoordinate $x$ und Größen der freien Anströmung
$Re_{s_t}$	Reynolds-Zahl gebildet mit der krummlinigen Oberflächenkoordinate $s_t$ und Grenzschichtrandgrößen
$Re_\lambda$	Reynolds-Zahl gebildet mit Transitionslängenkenngroße $\lambda$ und Grenzschicht-randgrößen
Tu	Turbulenzgrad, Turbulenzintensität

## Subskripte

b	<i>boundary-layer</i>
C	kompressibilitätsbezogen, kompressibilitätskorrigiert
e	Grenzschichtrand
f	allgemein fluktuierend, fein
g	gesamt, grob
i,j,k	bezogen auf diskreten Netzpunkt
ind	$Re_{ind}$ : durch Reynolds-Zahl charakterisierte Stelle theoretischer Indifferenz zwischen Dämpfung und Anfachung einer Störungsgröße
k	bestimmungsbezug zur Dissipation der k-Transportgleichung
krit	$Re_{krit}$ : durch Reynolds-Zahl charakterisierte Stelle abgeschlossener Transition, $C_{krit}$ : Vergleichsgröße des Transitionskriteriums
l, lam	laminar
lim	limitiert
m	im Sinne einer molekularen Eigenschaft
max	maximal
$\mu$	bestimmungsbezug zur Viskosität
nt	nicht-turbulent
N	Narasimha
P	bezogen auf den Produktionsterm einer Transportgleichung für charakteristische Größe der Turbulenzbeschreibung
s	s-ter Runge-Kutta Teilintegrationsschritt
t, turb	turbulent
ts	Tollmien-Schlichting
$\tau$	bezogen auf Schubspannung
v	viskos
W	Wert an der Oberfläche
zm	zweite Instabilitätsmode
$\infty$	Wert der ungestörten Anströmung

## Superskripte

2	zweite Differenz
4	vierte Differenz

$f$	fein
$g$	grob
$i,j,k$	in Index-Richtung $i,j,k$ weisend
$k$	konvektiv
$k,\omega$	dem $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell zugeordnet
$k,\zeta$	dem $k$ - $\zeta$ -Turbulenzmodell zugeordnet
$n$	Zeitschrittindex, Iterationsindex
$l$	laminar
$\lim$	limitiert
$p$	Gesamtschrittzahl der Runge-Kutta Integration
$s$	Schrittindex der Runge-Kutta Integrationsschritte
$S_i$	zur Fläche $S$ mit der Normalenorientierung in $i$ -Indexrichtung gehörend
$t$	turbulent
$T$	transponiert
$v$	viskos
$'$	Schwankungswert bei Reynolds-Dekomposition
$''$	Schwankungswert bei Favre-Dekomposition
$-$	Mittelwert bei Reynolds-Dekomposition
$\sim$	Mittelwert bei Favre-Dekomposition
$+$	entdimensionierte Größe der universellen Widerstands-, Geschwindigkeitsverteilung

## Operatoren

$\delta^2$	Operator zweiter Differenzen
$\nabla$	Nabla-Operator, $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$
$\text{Sp}(\underline{\underline{A}})$	Spur des Tensors zweiter Stufe $\underline{\underline{A}}$ , $\text{Sp}(\underline{\underline{A}}) = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{A}}_{ii}$
$\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}}$	Zweifache Überschiebung des Tensors zweiter Stufe $\underline{\underline{A}}$ mit dem Tensor zweiter Stufe $\underline{\underline{B}}$ , $\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\underline{A}}_{ij} \underline{\underline{B}}_{ji}$
$\leftarrow$	numerischer Zuweisungsoperator

---

## Abbildungen

1.1	Typisches transitionelles Profil des lokalen Reibungsbeiwertes $c_f$ . . . . .	1
3.1	Farbfadenversuch von O. Reynolds . . . . .	8
3.2	Schematische Darstellung des Transitionsprozesses der längsangeströmten Platte nach White . . . . .	9
3.3	Einfluss des Turbulenzgrades auf die kritische Reynolds-Zahl der längsangeströmten Platte . . . . .	10
3.4	Universelle Geschwindigkeitsverteilung einer vollturbulenten Grenzschicht . . . . .	13
3.5	Beispiel des lokalen Reibungsbeiwertes der einseitigen angeströmten ebenen Platte . . .	14
3.6	Sichtausschnitt A der Abb. 3.5 . . . . .	14
3.7	Sichtausschnitt B der Abb. 3.5 . . . . .	14
3.8	Reynoldssche Dekomposition eines Momentanwerts $f$ in dessen Mittelwert $\bar{f}$ und in dessen Schwankungswert $f'$ . . . . .	16
3.9	Intermittenzverteilung . . . . .	21
3.10	Intermittenz und Transitionslänge . . . . .	21
3.11	Korrelation zwischen $Re_{s_t}$ und $Re_\lambda$ . . . . .	22
3.12	Außenrand einer turbulenten Grenzschicht . . . . .	24
5.1	Flussbilanz über eine Zellseitenflächenpaarung einer Zelle als Teil der Super-Zelle . . .	36
5.2	Aufteilung des Zeitintegrationsproblems in einen explizit und einen implizit behandelten Anteil . . . . .	39
5.3	Feine ( $N_f$ ) und grobe ( $N_g$ ) Netzebene . . . . .	41
5.4	Äußere turbulente Domäne (Verteilung von $\mathcal{P}_{i,j,k}^{l,t}$ ) . . . . .	44
5.5	Laminare Domäne als Profilmhüllung (Verteilung von $\mathcal{P}_{i,j,k}^{l,t}$ ), Sichtausschnitt aus Abb. 5.4 . . . . .	44
6.1	Sequentieller Ablaufplan von <code>flower</code> . . . . .	46
6.2	Ausschnitt aus der vierten Ausführungsebene von <code>flower</code> mit dem Fokus auf den Mehrgitterschritt der Zeitintegration . . . . .	47
6.3	Ausschnitt aus dem Ausführungsplan von <code>step2</code> . . . . .	48
6.4	Ausschnitt aus dem Ausführungsplan von <code>step4</code> . . . . .	51
6.5	Infrastruktur der Transitions-/Turbulenz-Modellimplementierung . . . . .	53
6.6	Eingabebeispiel der Datei <code>trans.dat</code> . . . . .	65
6.7	Flussdiagramm der Routine <code>ingeottm</code> . . . . .	66

6.8	Programmerweiterung in <code>solinit</code> .....	68
6.9	Programmerweiterung in <code>fluxes</code> .....	70
6.10	Datenaustausch zwischen Zeitintegrations- und TT-Präparationsbereich .....	72
6.11	Flussdiagramm der Routine <code>prptt123</code> .....	74
6.12	Approximative Berechnung der Grenzschichtdicke .....	75
6.13	Berechnung von Strömungsgrößen des Grenzschichtrandes .....	76
6.14	Auswertung des Transitionskriteriums .....	77
7.1	Abmessungen und Randbedingungen der Plattenetze .....	79
7.2	Auflösung in x-Richtung aller verwendeten Plattenetze .....	79
7.3	Auflösung in y-Richtung aller verwendeten Plattenetze .....	79
7.4	Lokaler Reibungsbeiwert $c_f$ bei laminarer Strömung .....	81
7.5	Lokaler Reibungsbeiwert $c_f$ bei turbulenter Strömung (Baldwin-Lomax) .....	81
7.6	Lokaler Reibungsbeiwert $c_f$ bei turbulenter Strömung (Wilcox) .....	81
7.7	Konvergenzverhalten bei laminarer Strömung .....	82
7.8	Konvergenzverhalten bei turbulenter Strömung (Baldwin-Lomax) .....	82
7.9	Konvergenzverhalten bei turbulenter Strömung (Wilcox) .....	83
7.10	Geschwindigkeitsvektoren und turbulente Wirbelviskosität der turbulenten Plattengrenzschicht bei Simulation mit dem Baldwin-Lomax-Modell .....	84
7.11	Geschwindigkeitsvektoren und turbulente Wirbelviskosität der turbulenten Plattengrenzschicht bei Simulation mit dem Wilcox-Modell .....	84
7.12	Vergleich wandnormaler Profile der turbulenten Wirbelviskosität bei Baldwin-Lomax- und Wilcox-Turbulenzmodellierung im Bereich der Plattenvorderkante .....	85
7.13	Sichtausschnitt A der Abb. 7.12 .....	85
7.14	Vergleich wandnormaler Profile der turbulenten Wirbelviskosität bei Baldwin-Lomax- und Wilcox-Turbulenzmodellierung entlang der Platte .....	85
7.15	Vergleich wandnormaler Profile der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung bei Baldwin-Lomax- und bei Wilcox- Turbulenzmodellierung im Bereich der Plattenvorderkante .....	86
7.16	Sichtausschnitt A der Abb. 7.15 .....	86
7.17	Vergleich wandnormaler Profile der Geschwindigkeitskomponente in wandnormaler Richtung bei Baldwin-Lomax- und bei Wilcox-Turbulenzmodellierung im Bereich der Plattenvorderkante .....	86
7.18	Vergleich wandnormaler Profile der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung bei Baldwin-Lomax- und bei Wilcox- Turbulenzmodellierung entlang der Platte .....	87
7.19	Vergleich wandnormaler Profile der Geschwindigkeitskomponente in wandnormaler Richtung bei Baldwin-Lomax- und bei Wilcox-Turbulenzmodellierung entlang der Platte .....	87
7.20	Konvergenzverhalten der turbulenten Plattenströmung bei Variation des Turbulenzgrades am Einströmungsrand .....	88
7.21	Lokaler Reibungsbeiwert $c_f$ der turbulenten Plattenströmung bei Variation des Turbulenzgrades am Einströmungsrand .....	88
7.22	Wandnormale Profile des Turbulenzgrades der turbulenten Plattenströmung bei Variation des Turbulenzgrades am Einströmungsrand .....	89

7.23	Änderung des Turbulenzgrades in Hauptströmungsrichtung entlang des Symmetrierandes der turbulenten Plattenströmung bei Variation des Turbulenzgrades am Einströmungsrand .....	89
7.24	Wandnormales Profil der Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung bei $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-1}$ .....	90
7.25	... bei $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-2}$ .....	90
7.26	... bei $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-3}$ .....	90
7.27	Wandnormales Profil der Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung bei $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-1}$ .....	91
7.28	... bei $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-2}$ .....	91
7.29	... bei $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-3}$ .....	91
7.30	Konvergenz der Transitionslage für die erste Programmversion der TT-Modellierung ..	92
7.31	Lokalen Reibungsbeiwerte und ausgewählte $u$ -Geschwindigkeitsprofile für die erste Programmversion der TT-Modellierung .....	92
7.32	Konturdarstellung der Fluktuationsviskosität im Bereich der Plattenvorderkante für die erste Programmversion der TT-Modellierung .....	93
7.33	Stromliniendarstellung eines Sichtausschnitts der Abb. 7.32 sehr nah im Bereich der Vorderkante .....	93
7.34	Konvergenzverhalten der Strömung bei Verwendung der ersten Programmversion der TT-Modellierung .....	94
7.35	Konvergenzverhalten der Transitionslage bei Verwendung der Bedingung $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} = 0$ , wenn $x_{i,j,k} < 1.84546$ , bei der ersten Programmversion der TT-Modellierung .....	94
7.36	Lokaler Reibungsbeiwert und ausgewählte $u$ -Geschwindigkeitsprofile bei Verwendung der Bedingung $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} = 0$ , wenn $x_{i,j,k} < 1.84546$ , bei der ersten Programmversion der TT-Modellierung .....	95
7.37	Geschwindigkeitsvektoren und Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität bei Verwendung der Bedingung $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} = 0$ , wenn $x_{i,j,k} < 1.84546$ , bei der ersten Programmversion der TT-Modellierung .....	95
7.38	Konvergenzverhalten der Strömung bei Verwendung der Bedingung $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} = 0$ , wenn $x_{i,j,k} < 1.84546$ , bei der ersten Programmversion der TT-Modellierung .....	96
7.39	Konvergenz der Transitionslage für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung .....	96
7.40	Lokale Reibungsbeiwerte und ausgewählte $u$ -Geschwindigkeitsprofile für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung .....	96
7.41	Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung .....	97
7.42	Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität und Geschwindigkeitsvektoren für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung ..	97
7.43	Konturdarstellung des laminar/turbulenten Statusfeldes $\mathcal{F}^{l,t}$ für die endgültige Fassung der TT-Modellierung .....	97
7.44	Konvergenzverhalten der Strömungssimulation für die endgültige Fassung der TT-Modellierung .....	98
7.45	Konvergenz der Transitionslage für die modifizierte erste Programmversion der TT-Modellierung .....	98
7.46	Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität für die modifizierte erste Programmversion der TT-Modellierung .....	99

7.47	Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität und Geschwindigkeitsvektoren für die modifizierte erste Programmversion der TT-Modellierung .....	99
7.48	Lokale Reibungsbeiwerte und ausgewählte $u$ -Geschwindigkeitsprofile für die modifizierte erste Programmversion der TT-Modellierung .....	100
7.49	Konvergenzverhalten der Strömungssimulation für die modifizierte erste Fassung der TT-Modellierung .....	100
7.50	Konvergenz der Transitionslage für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung .....	100
7.51	Darstellung des laminar/turbulenten Statusfeldes $\mathcal{F}^{l,t}$ für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung .....	101
7.52	Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung .....	101
7.53	Lokale Reibungsbeiwerte und ausgewählte $u$ -Geschwindigkeitsprofile für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung .....	102
7.54	Konvergenzverhalten der Strömungssimulation für die endgültige Fassung der TT-Modellierung .....	102
7.55	Transitionslagenkonvergenz mit Mittelung im Vergleich mit der Transitionslagenkonvergenz ohne Mittelung für die endgültige Programmversion .....	103
7.56	Konvergenz der gesamten Strömungslösung bei arithmetischer Mittelung der detektierten Transitionslage .....	103
7.57	Auswirkungen der Variation des Parameters $NTMDLT$ auf die detektierte Transitionslage bei Simulation mit der endgültigen Programmversion auf dem 40'er Netz .....	104
7.58	Auswirkungen der Variation des Faktors $k^{(4)}$ zur Steuerung der künstlich dem Verfahren hinzugefügten Dissipation auf der Basis vierter Differenzen auf den lokalen Reibungsbeiwert .....	105
7.59	Sichtausschnitt A aus Abb. 7.58 .....	105
7.60	Sichtausschnitt B aus Abb. 7.58 .....	105
7.61	Sichtausschnitt C aus Abb. 7.58 .....	106
7.62	Einfluss der Kombination aus Reynolds-Zahl und wandnormaler Netzauflösung auf den entdimensionierten Abstandswert der ersten Netzlinie $y^+$ .....	106
7.63	Lokaler Reibungsbeiwert bei Variation der Netzauflösung in Hauptströmungsrichtung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ , $Ma_\infty = 0.071$ .....	107
7.64	Sichtausschnitt A aus Abb. 7.63 .....	107
7.65	Sichtausschnitt B aus Abb. 7.63 .....	107
7.66	$y^+$ bei Variation der Netzauflösung in Hauptströmungsrichtung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ , $Ma_\infty = 0.071$ .....	108
7.67	$\rho$ -Residuenkonvergenz bei Variation der Netzauflösung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ , $Ma_\infty = 0.071$ .....	109
7.68	Konvergenz des Auftriebsbeiwertes bei Variation der Netzauflösung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ , $Ma_\infty = 0.071$ .....	109

7.69	Konvergenz des Widerstandsbeiwertes bei Variation der Netzauflösung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ , $Ma_\infty = 0.071$ . . . . .	109
7.70	Vergleich des lokalen Reibungsbeiwertes bei fixierter Transition ( $x_t/L = 50.75\%$ ) für die bisherig verfügbare Modellierungs- und die TT-Modellierungsmethodik . . . . .	110
7.71	Konvergenz der Transitionsvorhersage bei Variation der Auflösung des Netzes in Hauptströmungsrichtung bei einem $y^+$ , welches für $Re_\infty = 1.67 \cdot 10^6$ optimiert ist. . . . .	110
7.72	Konvergenz der Transitionsvorhersage bei Variation der Auflösung des Netzes in Hauptströmungsrichtung bei einem $y^+$ , welches für $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ optimiert ist. . . . .	110
7.73	Fixierte laminare Domäne zur Simulation einer volllaminaren Strömung mittels TT-Modellierung . . . . .	111
7.74	Fixierte laminare Domäne zur Simulation einer vollturbulenten Strömung mittels TT-Modellierung . . . . .	111
7.75	Abweichung des lokalen Reibungsbeiwertes für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig laminar simulierten Lösung . . . . .	112
7.76	Abweichung des Druckbeiwerts für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig laminar simulierten Lösung . . . . .	112
7.77	Abweichung der $u$ -Geschwindigkeit für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig laminar simulierten Lösung . . . . .	112
7.78	Abweichung des lokalen Reibungsbeiwertes für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig turbulent simulierten Lösung . . . . .	113
7.79	Abweichung des Druckbeiwerts für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig turbulent simulierten Lösung . . . . .	113
7.80	Abweichung der $u$ -Geschwindigkeit für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig turbulent simulierten Lösung . . . . .	113
7.81	Lokaler Reibungsbeiwert für eine TT-modellierte Simulation bei fixierter Transitionslage bei 48.83% der Plattenlänge in Abhängigkeit der Netzpunkanzahl in Strömungsrichtung auf der Platte . . . . .	115
7.82	Lokaler Reibungsbeiwert für ein TT-modellierte Simulation bei fixierter Transitionslage bei 48.83% der Plattenlänge in Abhängigkeit von verschiedenen Transitionslängenformeln . . . . .	115
7.83	Konvergenzverhalten der Transitionslagen bei Variation der Transitionslängenformel . .	116
7.84	Konvergenzverhalten der Transitionslängen bei Variation der Transitionslängenformel .	116
7.85	Lokaler Reibungsbeiwert nach erfolgter Transitionsvorhersage mit Punkttransition . . . .	117
7.86	Konvergenzverhalten des $\rho$ -Residuums für die Simulation mit Transitionsvorhersage unter Verwendung von Punkttransition . . . . .	117
7.87	Konvergenzverhalten der Transitionslagenermittlung unter Anwendung von Punkttransition bei Variation der Punkanzahl in Hauptströmungsrichtung auf der Platte	118
7.88	Entwicklung der TS-Kreisfrequenz und der kinetischen Turbulenzenergie entlang der ebenen Platte . . . . .	118



7.89	Entwicklung des Referenzwertes des Transitionskriteriums entlang der ebenen Platte ..	119
7.90	Somers-Profil unter $2.03^\circ$ Anströmung .....	120
7.91	Ausschnitt des Netzes um das Somers-Profil .....	120
7.92	C-Blockstruktur des Netzes um das Somers-Profil mit Randbedingungen der Strömungssimulation .....	120
7.93	$y^+$ -Verteilung der Umströmung des Somers-Profils bei $\alpha = 0.01^\circ$ .....	121
7.94	Laminare Domäne um das Somers-Profil bei fixierter Transition bei 38.5% der Profiltiefe auf der Oberseite und bei 52.5% der Profiltiefe auf der Unterseite .....	121
7.95	Verlauf des lokalen Reibungsbeiwertes für das Somers-Profil bei fixierter Transition an der Stelle experimenteller Transition für den Anstellwinkel $\alpha = 0.01^\circ$ .....	122
7.96	Verlauf des lokalen Reibungsbeiwertes für das Somers-Profil bei fixierter Transition an der Stelle experimenteller Transition für den Anstellwinkel $\alpha = 2.03^\circ$ .....	122
7.97	Ablösegebiet im Bereich der Hinterkante für die Anströmung des Somers-Profil bei experimenteller Transitionslage für den Anstellwinkel $\alpha = 0.01^\circ$ .....	123
7.98	Ablösegebiet im Bereich der Hinterkante für die Anströmung des Somers-Profil bei experimenteller Transitionslage für den Anstellwinkel $\alpha = 2.03^\circ$ .....	123
7.99	Verlauf des $\rho$ -Residuums, des Auftriebsbeiwerts und des Widerstandsbeiwertes für das Somers-Profil bei fixierter Transition an der Stelle experimenteller Transition für den Anstellwinkel $\alpha = 0.01^\circ$ .....	124
7.100	Verlauf des $\rho$ -Residuums, des Auftriebsbeiwerts und des Widerstandsbeiwertes für das Somers-Profil bei fixierter Transition an der Stelle experimenteller Transition für den Anstellwinkel $\alpha = 2.03^\circ$ .....	124
7.101	Übergangsverhalten der konturnahen Geschwindigkeitsvektoren von laminar zu turbulent für die Oberseite des Somers-Profils bei fixierter Transition an experimenteller Stelle für den Anstellwinkel $\alpha = 0.01^\circ$ .....	125
7.102	Übergangsverhalten der konturnahen Geschwindigkeitsvektoren von laminar zu turbulent für die Unterseite des Somers-Profils bei fixierter Transition an experimenteller Stelle für den Anstellwinkel $\alpha = 0.01^\circ$ .....	125
7.103	Übergangsverhalten der konturnahen Geschwindigkeitsvektoren von laminar zu turbulent für die Oberseite des Somers-Profils bei fixierter Transition an experimenteller Stelle für den Anstellwinkel $\alpha = 2.03^\circ$ .....	126
7.104	Übergangsverhalten der konturnahen Geschwindigkeitsvektoren von laminar zu turbulent für die Unterseite des Somers-Profils bei fixierter Transition an experimenteller Stelle für den Anstellwinkel $\alpha = 2.03^\circ$ .....	126
7.105	Verhalten der Transitionslagen während des Transitionsvorhersageprozesses bei Punktransition und Variation der Starttransition für $\alpha = 0.01^\circ$ .....	127
7.106	Verhalten der Transitionslagen während des Transitionsvorhersageprozesses bei Punktransition und Variation der Starttransition für $\alpha = 2.03^\circ$ .....	127
7.107	Verhalten der Transitionslagen während des Transitionsvorhersageprozesses mit Transitionslänge nach Transitionslängeformel c) für $\alpha = 0.01^\circ$ .....	128
7.108	Verhalten der Transitionslagen während des Transitionsvorhersageprozesses mit Transitionslänge nach Transitionslängeformel c) für $\alpha = 2.03^\circ$ .....	128
7.109	Verhalten der Transitionslängen während des Transitionsvorhersageprozesses mit Transitionslänge nach Transitionslängeformel c) für $\alpha = 0.01^\circ$ .....	129
7.110	Verhalten der Transitionslängen während des Transitionsvorhersageprozesses mit Transitionslänge nach Transitionslängeformel c) für $\alpha = 2.03^\circ$ .....	129

B.1 Funktion $G(\Lambda; D)$ .....	143
------------------------------------	-----

---

## Tabellen

6.1	Generelle Steuerungsparameter des TT-Modells in <code>inp.dat</code> .....	55
6.2	Zusätzliche Steuerungsparameter des TT-Modells in <code>inp.dat</code> .....	57
6.3	Steuerungsparameter der zuvor schon implementierten Transitionsmodellierung in <code>inp.dat</code> .....	60
6.4	Steuerungsparameter der zuvor schon implementierten Transitionsbehandlung in <code>trans.dat</code> .....	62
6.5	Grundlegende Datenfelder der TT-Modellierung .....	68
7.1	TT-modellspezifische Parametereinstellungen für die Lösungsvergleiche der Programmversionen bei $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ , $Ma_\infty = 0.071$ .....	103
7.2	Experimentelle Transitionslagen der Umströmung des Somers-Profiles .....	121

## Einleitung

Die reibungsbehaftete Umströmung fester Oberflächen führt zur Ausbildung von Grenzschichten. Zumeist entwickeln sich diese zunächst als laminare Schicht und gehen unter bestimmten Umständen in eine turbulente Grenzschicht über. Dieser Übergang erstreckt sich über eine endliche Distanz, in welcher die lokalen Beiwerte einer kontinuierlichen und signifikanten Änderung unterworfen sind. Abb. 1.1 zeigt beispielhaft den lokalen Reibungsbeiwert entlang der ebenen Platte unter dem Einfluss eines Übergangs von laminarer zu turbulenter Strömung. Zusätzlich sind in dieser Abbildung analytische Vergleichslösungen für die voll-laminare und voll-turbulente Strömung dargestellt. Kennzeichnend sind ein lokales Minimum und ein lokales Maximum des Reibungsbeiwertes im Transitionsbereich. Der transitionelle integrale Beiwert wird also von dem Wert einer voll ausgebildeten laminaren oder turbulenten Strömung entlang der Platte abweichen.

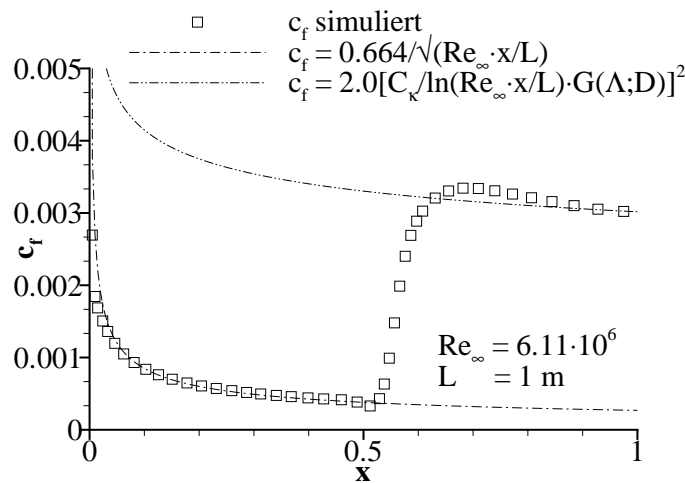


Abb. 1.1. Typisches transitionelles Profil des lokalen Reibungsbeiwertes  $c_f$

### 1.1 Motivation

Für den Entwurfsprozess von Flugzeugen stellt der Übergangsbereich nach wie vor ein ungelöstes Problem dar. Denn der Entwurf unterliegt mehr denn je Aspekten wie Wirtschaftlichkeit und Sicherheit.

Die Vorhersage integraler Beiwerte, insbesondere des Reibungsbeiwertes der Auftriebskonfiguration, ist hierbei unumgänglich. Unter dem zunehmenden Zwang kurzer Entwicklungszeiten und niedriger Entwicklungskosten bedarf es immer mehr numerischer Simulationswerkzeuge, die unter Berücksichtigung des Auftretens transitioneller Strömungsbereiche die integralen Beiwerte in kurzer Zeit und mit hoher Genauigkeit vorhersagen.

In diesem Punkt besteht eine Diskrepanz zwischen industrieller Anforderung und den zur Verfügung stehenden Simulationsmitteln. Daher beschränkt sich die industrielle Simulation sehr häufig auf eine Transitionsvorgabe oder auf eine Vernachlässigung transitioneller Erscheinungen durch eine gänzlich laminare oder turbulente Simulation der Körperumströmung. Die Transitionsvorgabe basiert auf der Kenntnis experimentell ermittelter Transitionslagen. Zur Vorhersage des Transitionsbeginns sind in der Entwurfspraxis weitestgehend Methoden auf der Basis empirischer Korrelationen oder der primären Stabilitätstheorie im Einsatz [1]. Letzteres beruht im Wesentlichen auf der Anwendung der  $e^n$ -Methode in Verbindung mit der Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung. Die primäre Stabilitätstheorie unterliegt der Parallelströmungsannahme und dem Grundsatz, dass Tollmien-Schlichting-Instabilitäten die Ursache der Transition sind [2]. Diese Annahmen sind im Falle von Querströmungsinstabilitäten haltlos, da hier weitestgehend dreidimensionale nichtlineare Effekte und Oberflächenrauigkeiten den Transitionsprozess dominieren. Der Einsatz der  $e^n$ -Methode hat zwar eine breite Akzeptanz erfahren, bedarf aber häufig der umständlichen Kopplung gleich mehrerer numerischer Werkzeuge. So verwendet man häufig zunächst ein Grenzschichtverfahren zur Berechnung der benötigten Grenzschichtparameter in erforderlicher Genauigkeit. Ein Navier-Stokes-Verfahren ist für diesen Zweck nur bedingt geeignet. Zur Berechnung des Hauptströmungsfeldes muss das Grenzschichtverfahren entweder mit einem Euler- oder Navier-Stokes-Verfahren gekoppelt werden. Zur Lösung der Störungsdifferentialgleichung muss ein zusätzliches Verfahren eingebunden werden, welches diesen Dienst übernimmt. Zusätzlich muss der Wert des Exponenten  $n$ , der den Transitionsbeginn charakterisiert, mit experimentellen Daten korreliert werden [3]. Im Falle komplexer Konfigurationen führt das diffizile Zusammenspiel aller Einzelwerkzeuge häufig zu Schwierigkeiten. Anderweitige Arbeiten, die auf der nichtlinearen parabolisierten Störungsdifferentialgleichung [4] beruhen, um den Transitionsbeginn zu ermitteln, haben nicht die Akzeptanz der  $e^n$ -Methode erreicht. Entscheidend ist zudem, dass Methoden auf der Basis der Stabilitätstheorie nur eine Vorhersage der Lage des Transitionsbeginns treffen, aber im eigentlichen Sinne keine geeignete physikalische Modellierung des transitionellen und des anschließenden turbulenten Bereichs bieten.

## 1.2 Zielsetzung

Ein alternativer Ansatz erhebt den Anspruch, in einer Simulation unter Nutzung *eines* Simulationswerkzeuges sowohl laminare und transitionelle, als auch turbulente Strömungsbereiche zu modellieren und so den Beginn und das Ende des transitionellen Bereichs lediglich als Teil des eigentlichen Lösungsprozesses für das gesamte Strömungsfeld zu erhalten. Dieser Ansatz unterliegt der Annahme, dass die Modellgleichungen, die zur Beschreibung turbulenter Schwankungen entwickelt wurden, unabhängig von der eigentlichen Ursache der Schwankungen, der Beschreibung jeglicher Schwankungen im Strömungsfeld genügen. Dies meint, dass Turbulenzmodelle auf der Basis von Transportgleichungsansätzen für die physikalischen Wirkungsmechanismen von Schwankungserscheinungen im Strömungsfeld in sowohl laminaren, transitionellen als auch turbulenten Bereichen eine allgemeine Gültigkeit besitzen. Das Modell ermittelt das Einsetzen der Turbulenz als starken Anstieg nicht-turbulenter Schwankungen und detektiert damit den Transitionsbeginn innerhalb des iterativen

Lösungsprozesses für das gesamte Strömungsfeld. Eine genauere Beschreibung der Modellgleichungen, die dem Ansatz zu Grunde liegen, folgt in Kap. 4.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Modellgleichungen des Ansatzes unter Nutzung einer bestehenden Implementierung des  $k$ - $\omega$ -Zweigliederturbulenzmodells nach Wilcox in den Strömungslöser *FLOWer* zu implementieren. Da der Ansatz der Transitionsmodellierung nicht auf die Kopplung mit einem bestimmten Turbulenzmodell festgelegt ist, solange das Modell auf Transportgleichungsansätzen für die kinetische Turbulenzenergie beruht, soll die Implementierung zudem die Modulstruktur für eventuelle Kopplungen des Transitionsansatzes mit anderen Turbulenzmodellen bereitstellen.

Obwohl diese Arbeit nicht der eigentlichen Studie der physikalischen Hintergründe der Transition gewidmet ist, wirft Kap. 3 dennoch einen notwendigen Blick auf diese Hintergründe. Weiterhin sind nachfolgend die kontinuumsmechanischen Feldgleichungen für die Bewegung des Fluids (s. Kap. 2), beschrieben.

Der Transitionsmodellierungsansatz ist in verschiedenen Formen in der Literatur dokumentiert, in Verbindung mit Ein- und Zweigliederturbulenzmodellen. In Kombination mit dem  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell ist das Transitionsmodell jedoch nicht dokumentiert. Daher sind die dem Transitionsmodell zu Grunde liegenden Gleichungen für eine Kombination mit dem  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell übertragen worden. Dieser Übertragungsprozess ist in Kap. 4 beschrieben.

Das approximative Lösungsverfahren der fluiddynamischen Feldgleichungen im Strömungslöser *FLOWer* wird in Kap. 5 dokumentiert.

Die Darstellung der algorithmischen Umsetzung der Modellimplementierung wird in detaillierter Beschreibung in Kap. 6 folgen und durch Strukturdiagramme gemäß der Notation nach Nassi-Shneidermann im Anh. A ergänzt werden.

Die erfolgte Implementierung ist auf ihre Lauffähigkeit hin geprüft und anschließend an Hand eines geeigneten Falls hinsichtlich der Simulationsgenauigkeit im Vergleich mit erzielten Ergebnissen der Modellentwickler und Experimenten validiert worden. Als Vergleichsfall wurde die Strömung der ebenen Platte bei  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.071$  und  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-4}$  ausgewählt. Experimentelle Vergleichsdaten liegen hierfür durch die Untersuchungen von Schubauer und Klebanoff [6] vor. Hierbei wurden Einflüsse aus Variationen des Gitters und der Parameter der Modellimplementierung untersucht. Als weiterer Testfall wurde die Strömung um ein Laminarprofil bei  $Re_\infty = 4 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.1$  und  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-4}$  für die Anstellwinkel  $\alpha = 0.01^\circ$  und  $\alpha = 2.03^\circ$  unter Einsatz der Modellimplementierung untersucht. Abschließend wird in Kap. 8 eine Beurteilung der Einsatz- und Aussagefähigkeit des Transitionsmodells in Kombination mit dem  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell, unter Einbeziehung der Besonderheiten des Strömungslösers *FLOWer*, gegeben.

## Kontinuumsmechanische Bewegungsgleichungen Newtonscher Fluide

Das in seiner Bewegung zu beschreibende Fluid wird als Kontinuum aufgefasst, so dass ein Volumenelement  $d\mathcal{V}$  in seinen Eigenschaften als homogen angesehen werden kann. Die dreidimensionale Bewegung des Strömungsfeldes ist durch das Vektorfeld der Geschwindigkeit  $\underline{v}$ , durch das Druckfeld  $p$  und das Temperaturfeld  $T$  bestimmt. Der Bestimmung dieser fünf Größen genügen die insgesamt fünf zur Verfügung stehenden Bilanzgleichungen. Als diese sind zu nennen, eine Gleichung der Massenbilanz, drei Gleichungen der Impulsbilanz und eine Gleichung der Energiebilanz. Im Falle Newtonscher Fluide lassen sich noch zwei spezielle Materialgesetze angeben. Dies ist einerseits der lineare Zusammenhang zwischen Spannungstensor und Dehnratentensor und andererseits das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz. Die so geschlossenen Bilanzgleichungen enthalten zusätzlich die Dichte  $\rho$ , die isobare spezifische Wärmekapazität  $c_p$ , sowie die beiden molekularen Transportgrößen, dynamische Viskosität  $\mu_m$  und Wärmeleitfähigkeit  $K_m$ . Sowohl für die Dichte als auch die genannten Stoffwerte muss die Abhängigkeit von Druck und Temperatur gegeben sein. Nachfolgend werden die zuvor genannten Gleichungen in integraler Formulierung notiert, wie es in der numerischen Strömungsmechanik für die Umsetzung der Bewegungsgleichungen in Finite-Volumen-Verfahren allgemein üblich ist.

### 2.1 Bilanzgleichungen in integraler Formulierung

Die zuvor genannten Bilanzgleichungen können unter Einbeziehung der genannten Materialgleichungen und der Hypothese von Stokes [2, S. 69 ff.] kompakt als

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \underline{U} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \underline{\underline{F}}(\underline{U}) \underline{n} d\mathcal{S} = \underline{0} \quad (2.1)$$

formulieren werden. Dabei wurde die Wirkung äußerer Massenkräfte vernachlässigt. In (2.1) repräsentiert  $\mathcal{V}$  ein beliebig geformtes, im Folgenden raumfestes Bilanzvolumen und  $\mathcal{S}(\mathcal{V})$  dessen äußere Berandung. Der Vektor  $\underline{U}$  fasst die konservativen Variablen zu

$$\underline{U} = [\rho, \rho \underline{v}, \rho E]^T \quad (2.2)$$

zusammen, mit  $\rho$ ,  $\underline{v}$ , und  $E$  als der Dichte, dem Geschwindigkeitsfeld und der spezifischen Totalenergie. Letztere lässt sich ausdrücken durch  $E = e + 1/2 \|\underline{v}\|^2$  mit  $e$  als dem Anteil der spezifischen inneren Energie an der Totalenergie. Der Vektor  $\underline{n}$  bildet die normierte äußere Oberflächennormale an die Berandung des Bilanzvolumens.  $d\mathcal{V}$  und  $d\mathcal{S}$  stellen infinitesimale Teile des Bilanzvolumens und dessen Berandung dar. Der Flussdichtentensor  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(\underline{U})$  lässt sich über die Beziehung

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(\underline{U}) = \underline{\underline{F}}^k(\underline{U}) - \underline{\underline{F}}^v(\underline{U}) \quad (2.3)$$

aufspalten in einen reibungsfreien, konvektiven Anteil  $\underline{\underline{F}}^k$  und einen reibungsbehafteten Anteil  $\underline{\underline{F}}^v$  mit

$$\underline{\underline{F}}^k(\underline{U}) = \begin{bmatrix} \rho \underline{v} \\ \rho \underline{v} \underline{v}^T + p \underline{\underline{E}} \\ \rho H \underline{v} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

und

$$\underline{\underline{F}}^v(\underline{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}} \underline{v} - \underline{q} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Bei dieser Formulierung stellt  $\underline{\underline{T}}$  den viskosen Spannungstensor dar, der durch Abspaltung des Druckes von den Normalspannungen aus dem Spannungstensor  $\underline{\underline{T}}^*$  gemäß

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^* + p \underline{\underline{E}} \quad (2.6)$$

hervorgeht.

Für die lineare Beziehung zwischen Spannungen und Dehnraten des Fluids lässt sich mit dem viskosen Spannungstensor  $\underline{\underline{T}}$  und dem Dehnratentensor  $\underline{\underline{S}}$  der folgende funktionale Zusammenhang herleiten:

$$\underline{\underline{T}} = \mu_m \left( 2 \underline{\underline{S}} - \frac{2}{3} (\nabla \underline{v}) \underline{\underline{E}} \right). \quad (2.7)$$

Der Dehnratentensor ergibt sich dabei zu

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{v}^T + \underline{v} \nabla^T). \quad (2.8)$$

Es sind in den zuvor genannten Gleichungen  $p$  der Druck, der sich mit der Stokesschen Hypothese als Mittel der Invarianten des Spannungstensors  $\underline{\underline{T}}^*$  ergibt, und  $\underline{q}$  der Vektor der Wärmestromdichte, der unter Berücksichtigung des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes mit der Temperatur  $T$  und mit dem Transportkoeffizienten für den molekularen Energieaustausch  $K_m$  in der Form

$$\underline{q} = -K_m \nabla T \quad (2.9)$$

darstellbar ist.  $H$  kennzeichnet die Totalenthalpie, die mit der Totalenergie über die Beziehung

$$H = E + p/\rho \quad (2.10)$$

verknüpft ist. Die Größe  $\underline{\underline{E}}$  entspricht in obigen Ausführungen dem Einheitstensor.

Es sind somit die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie eines Newtonschen Fluids in integraler Form dargestellt. Hierbei sei nochmals erwähnt, dass bei der Formulierung die Wirkung äußerer spezifischer Massenkkräfte vernachlässigt wurde.

## 2.2 Stoffeigenschaften

Die Schließung der Bilanzgleichungen erfordert zusätzliche Beziehungen zwischen den thermischen und kalorischen Zustandsgrößen. Für thermisch und kalorisch perfekte Gase gilt die thermische Zustandsgleichung



$$p = \rho RT \quad (2.11)$$

mit  $R$  als der speziellen Gaskonstanten, die aus der allgemeinen Gaskonstanten  $R^*$  durch Teilung mit dem Molekulargewicht  $M$  des Gases hervorgeht. Mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa = c_p/c_v$  steht die kalorische Zustandsgleichung in der Form

$$T = \frac{\kappa - 1}{R} \left( E - \frac{v v}{2} \right) \quad (2.12)$$

zur Verfügung.

Die Transportkoeffizienten für molekularen Impuls- ( $\mu_m$ ) und Wärmeaustausch ( $K_m$ ) sind Materialfunktionen und abhängig vom thermodynamischen Zustand des Fluids. Für Gase ist die dynamische Viskosität im Wesentlichen eine Funktion der Temperatur und als solches über das Sutherland-Gesetz darstellbar als

$$\mu_m(T) = C_1 \frac{\sqrt{T^3}}{T + C_2} \quad (2.13)$$

Hierbei gilt für die beiden Konstante  $C_1$  und  $C_2$  für Luft  $C_1 = 1.458 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{sec m} \sqrt{\text{K}}}$  und  $C_2 = 110.3 \text{K}$ . Der Wärmeleitungskoeffizient ist unter der Annahme einer konstanten molekularen Prandtl-Zahl  $\text{Pr}_m = c_p \mu_m / K_m$  gegeben als

$$K_m = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \frac{\mu_m}{\text{Pr}_m}. \quad (2.14)$$

## Theoretische Grundlagen der Berechnung transitioneller Strömungen

Beim Übergang des laminaren in den turbulenten Strömungszustand handelt es sich um ein Stabilitätsproblem. Dieses wurde schon von O. Reynolds im Jahre 1883 für den Fall der Rohrströmung durch dessen berühmten Farbfadenversuch nachgewiesen. Dessen Untersuchungen führten zur Bestimmung der dimensionslosen Kennzahl dynamisch ähnlicher Strömungen als

$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu_m}, \quad (3.1)$$

die dementsprechend die Bezeichnung Reynolds-Zahl trägt. Hierbei werden die charakteristischen Größen Dichte  $\rho$ , molekulare dynamische Viskosität  $\mu_m$ , Geschwindigkeit  $V$  und eine charakteristische Längenabmessung  $L$  der Strömung in Beziehung zueinander gesetzt. Auf den Farbfadenversuch geht die Erkenntnis zurück, dass der Übergang von der laminaren in die turbulente Strömungsform bei annähernd der gleichen Reynolds-Zahl  $\text{Re}$  stattfindet. Die Reynolds-Zahl, die den Anfang der Turbulenz charakterisiert, wird daher als kritische Reynolds-Zahl bezeichnet und mit  $\text{Re}_{\text{krit}} = 2300$  angegeben.

Abb. 3.1 zeigt Momentaufnahmen des Verlaufs eines Farbfadens, der in eine Rohrströmung eingebracht wurde. Das Strömungsmedium ist für beide Abbildungen gleich. Beide Strömungen sind lediglich durch unterschiedliche Reynolds-Zahlen gekennzeichnet. Im Falle der turbulenten Strömung ist diese um den Faktor  $2520/1150 = 2.19$  größer. Dies wird dadurch erreicht, dass für Strömung b) entweder die Strömungsgeschwindigkeit um diesen Faktor gegenüber a) erhöht oder Strömung b) an einer um denselben Faktor weiter stromab liegenden Stelle als Strömung a) beobachtet wird. Das durch Abb. 3.1 dokumentierte Instabilitätsverhalten unterliegt der Vorstellung, dass die Laminarströmung unter der Einwirkung kleiner Störungen steht. Bei Interpretation der Reynolds-Zahl als charakteristisches Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften in der Strömung, lässt sich die Deutung entwickeln, dass im Fall niedriger Reynolds-Zahlen die Störungen durch die Wirkung der Zähigkeit ausreichend gedämpft und somit zum Abklingen gebracht werden. Während im Fall hoher Reynolds-Zahlen die Dämpfungswirkung der Zähigkeit nicht mehr ausreicht und die Störungen angefacht werden. Der Übergang in die turbulente Strömungsform wird so eingeleitet.

Nachfolgend wird das zuvor genannte für den Übergang der Strömungsform an der längsangeströmten Platte betrachtet.

### 3.1 Störungsentwicklung in der Plattengrenzschicht

Entsprechend der Rohrströmung lässt sich das Transitionsverhalten der längsangeströmten Platte erkennen. Nachfolgende Erläuterungen fokussieren den idealisierten Transitionsprozess der Platte



**Abb. 3.1.** Farbfadenversuch von O. Reynolds a) Laminare Strömung,  $Re = 1150$ , b) Turbulente Strömung,  $Re = 2520$

für eine inkompressible Strömung und sind weitestgehend den Ausführungen aus [2, S. 451 ff.] und [7, S. 3 ff.] entnommen.

Der Transitionsprozess setzt bei der Platte in einem Abstand  $x$  von der Plattenvorderkante ein. Bis dahin ist die Strömung laminar. Die laminare Grenzschicht ist in diesem Bereich zwar stabil, aber dennoch nicht frei von Störungen, die sich in Form von Schwankungsbewegungen der Strömungsgrößen zeigen. Dies rührt zum einen daher, dass die Plattenanströmung niemals gänzlich schwankungsfrei ist, zum anderen erzeugen Oberflächenrauigkeiten und Vibrationen der Platte selbst Strömungsstörungen. Die entscheidende Frage hinsichtlich der Stabilität der Strömung stellt sich dabei in der Form, ob die Störungsbewegungen zeitlich abklingen oder anwachsen. Die Strömung wird als stabil für den Fall abklingender und als instabil bei angefachten Störungen bezeichnet. Der Transitionsprozess beginnt formal, wenn die Störungen angefacht werden. Die Störungen, die diesen Transitionsprozess einleiten weisen noch einen ausgeprägten zweidimensionalen Wellencharakter auf und werden als Tollmien-Schlichting-Wellen bezeichnet. Diese können durch Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung, die die Grundlage der primären Stabilitätstheorie bildet, berechnet werden [2, S. 455 ff.] und stellen die erste Instabilitätsmode der Strömung dar.

An dieser Stelle sei hinzugefügt, dass durch die Arbeiten von Mack [9] die Erkenntnis vorliegt, dass für Mach-Zahlen größer vier, die zweite Instabilitätsmode hochfrequenter, akustischer Störungen im Einfluss auf den Transitionsprozess gegenüber der ersten Mode überwiegt.

Beobachtungen der Plattengrenzschicht in einem Bereich weiter stromab zeigen, dass es auf Grund sekundärer Instabilitäten zur Ausbildung dreidimensionaler Störungsstrukturen kommt. Analytisch lässt sich der Übergang von der zweidimensionalen Störungscharakteristik der Tollmien-Schlichting-Wellen bis zur Entstehung dreidimensionaler Störungen und deren Entwicklung stromab durch die sekundäre Stabilitätstheorie beschreiben [2, S. 510 ff.]. Die dreidimensionalen Strukturen werden gemeinhin als  $\Lambda$ -Strukturen bezeichnet. Deren Zerfall führt zur Bildung von so genannten Turbulenzflecken, die schließlich den Übergang in die vollturbulente Grenzschichtströmung einleiten. Die Visualisierung dieses Übergangsprozesses übernimmt Abb. 3.2.

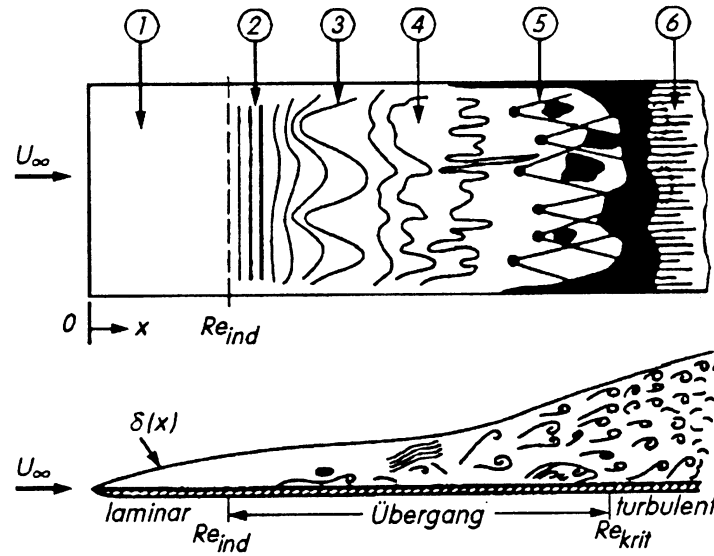


Abb. 3.2. Schematische Darstellung des Transitionsprozesses der längsangeströmten Platte nach White

### 3.1.1 Abhängigkeiten von der lokalen Reynolds-Zahl

Die Größe  $Re_{ind}$  aus Abb. 3.2 kennzeichnet den Beginn des Transitionsbereichs und die Größe  $Re_{krit}$  den Punkt abgeschlossener Transition.  $Re_{ind}$  wird auch als Indifferenz-Reynolds-Zahl bezeichnet und stellt gerade diejenige Reynolds-Zahl dar, bei der zeitliche Anfachung und Dämpfung der Störungen in der Strömung im Gleichgewicht sind. Der Strömungszustand befindet sich am Stabilitätsrand und wird als indifferent bezeichnet. Die Indifferenz-Reynolds-Zahl ist die kleinste Reynolds-Zahl, für die die Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung für alle Störungswellenlängen gerade noch nicht instabil ist. Damit diese Reynoldszahlen jeweils einen Punkt entlang der Platte im Sinne eines Abstandes zur Vorderkante wiedergeben, sind diese Reynolds-Zahlen mit lokalen Größen der Strömung zu bilden. In der Literatur üblich ist die Angabe in zwei Varianten. Entweder wird die lokale Reynolds-Zahl in der Form

$$Re_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu_m} \quad \text{oder} \quad Re_1 = \frac{\rho U_\infty \delta_1}{\mu_m} \quad (3.2)$$

angegeben, mit  $\delta_1$  als der Verdrängungsdicke. Diese ergibt sich nach Blasius [8] für die inkompressible laminare Grenzschicht zu

$$\delta_1 = 1.72 \sqrt{(\mu_m x) / (\rho U_\infty)}. \quad (3.3)$$

Dementsprechend erhält man  $Re_1 = 1.72 \sqrt{Re_x}$  als bequeme Umrechnung.

Die minimale Reynolds-Zahl, für die noch eine indifferente Störung existiert, wird von [2, S. 470] als Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit  $Re_{1,ind} = 520$  angegeben. Unter Nutzung der genannten Umrechnungsbeziehung ergibt sich dafür eine Reynolds-Zahl, die mit dem lokalen Abstand zur Plattenvorderkante gebildet wurde, von etwa

$$Re_{x,ind} = 0.9 \cdot 10^5. \quad (3.4)$$

Der experimentelle Indifferenzpunkt wird immer etwas stromab des ideellen theoretischen Wertes zu erwarten sein, da jener auf stark vereinfachten Annahmen basiert.

Als maximal experimentell ermittelte kritische Reynolds-Zahl wird in [2, S. 476] ein Wert von

$$\text{Re}_{x,\text{krit}} = 3.9 \cdot 10^6. \quad (3.5)$$

genannt. Das bedeutet, dass bisher nie bei experimentellen Untersuchungen der längsangeströmten Platte der Punkt abgeschlossener Transition weiter stromab ermittelt wurde, als dies durch die Reynolds-Zahl in (3.5) angegeben wird. Es existiert also eine obere Grenze für die kritische Reynolds-Zahl der Plattengrenzschicht.

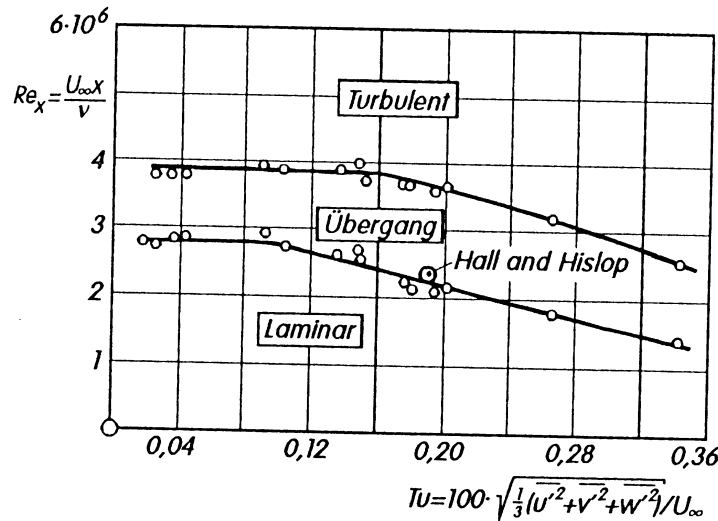
### 3.1.2 Einfluss des Turbulenzgrades

Bisher blieb in den Betrachtungen über die Einflüsse der lokalen Reynolds-Zahl der Einfluss des Störungsgrades der Außenströmung unerwähnt. Es besteht aber sehr wohl ein Einfluss dieses Störungsgrades, der im Folgenden als Turbulenzgrad bezeichnet wird, und der kritischen Reynolds-Zahl  $\text{Re}_{x,\text{krit}}$ . Der Turbulenzgrad der Außenströmung kann quantitativ als zeitlicher Mittelwert turbulenter Schwankungsgeschwindigkeiten bemessen werden. Bezeichnen  $\overline{(u')^2}$ ,  $\overline{(v')^2}$  und  $\overline{(w')^2}$  diese Mittelwerte für die drei Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeit in den drei Raumrichtungen, so versteht man unter dem Turbulenzgrad einer Strömung die Größe

$$\text{Tu} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \left( \overline{(u')^2} + \overline{(v')^2} + \overline{(w')^2} \right)}}{U_\infty}, \quad (3.6)$$

dabei ist mit  $U_\infty$  der Betrag des Geschwindigkeitsvektors in der freien Anströmung dargestellt.

Der Wert von  $\text{Re}_{x,\text{krit}} = 3.9 \cdot 10^6$  wurde für einen Turbulenzgrad von  $\text{Tu} = 2 \cdot 10^{-4}$  nachgewiesen. Insgesamt ergab sich bei Experimenten, dass der Wert der kritischen Reynolds-Zahl aus (3.5) für Turbulenzgrade  $\text{Tu} < 1 \cdot 10^{-3}$  beibehalten wird. Mit steigendem Turbulenzgrad sinkt die kritische Reynolds-Zahl dennoch beträchtlich ab. Dieses Verhalten wird durch Abb. 3.3 verdeutlicht.



**Abb. 3.3.** Einfluss des Turbulenzgrades auf die kritische Reynolds-Zahl der längsangeströmten Platte, nach Messungen von Schubauer und Skramstad

Es wären an dieser Stelle weitere Einflussfaktoren, wie Kompressibilität, Wandrauheiten und Druckgradient zu nennen. Diese Faktoren besitzen aber für die Untersuchungen in der vorliegenden

Arbeit keine Relevanz. Denn die Plattenströmung, die nachfolgend simuliert werden soll, ist nahezu inkompressibel und wird als hydraulisch glatt angesehen. Daher unterbleibt an dieser Stelle eine Darlegung weiterer Einflussfaktoren. Es sei hier dafür auf [2, S. 479 ff.] verwiesen.

### 3.2 Grundzüge turbulenter Strömungen

Bisher wurde der Begriff der Turbulenz nur im Sinne einer intuitiven Vorstellung genutzt. Im nachfolgenden Abschnitt werden daher einige grundlegenden Aspekte turbulenter Strömungen bis hin zur statistischen Turbulenzmodellierung dargelegt. Anschließend werden stets voll ausgebildete turbulente Strömungen betrachtet. Zunächst versteht man unter Turbulenz eine stochastische Schwankungsbewegung, die der Hauptbewegung der Strömung überlagert ist. Turbulente Strömungen sind immer instationär, dreidimensional, wirbelbehaftet und unregelmäßig. Sämtliche Größen turbulenter Strömungen sind von Ort und Zeit abhängig. Die auftretenden Schwankungsbewegungen haben zur Folge, dass ein verstärkter Transport der Strömungseigenschaften quer zur Hauptbewegungsrichtung zu verzeichnen ist. Dies führt zu einer erhöhten Durchmischung der Strömungseigenschaften gegenüber einer laminaren Strömung. Die Schwankungsbewegungen sind hier stets im Sinne makroskopischer Bewegungen zu verstehen. Denn die Skalen der Turbulenz liegen weit oberhalb molekularer Größenordnungen.

Wie Experiment und Simulation (vgl. Abb. 1.1) zeigen, ist der Übergang in die turbulente Strömungsform unter Anderem mit der Zunahme des Reibungsbeiwertes verbunden. Dies liegt darin begründet, dass der verstärkte Quertransport der Strömungsgrößen zu einem völligeren Geschwindigkeitsprofil der Hauptströmungskomponente normal zur Oberfläche führt. Dadurch liegt ein höherer Wandgradient dieser Größe vor, welcher bei konstanten Stoffwerten proportional dem Reibungsbeiwert ist, als bei einer vergleichbaren laminaren Strömung.

Um eine Simulation turbulenter Strömungen durchführen zu können, müssen Gesetzmäßigkeiten zur Bewegungsbeschreibung dieser Strömungsform bekannt sein. Grundsätzlich unterliegen turbulente Strömungen den gleichen physikalischen Gesetzmäßigkeiten wie die laminaren Strömungen und sind als solches durch die Bilanzgleichungen (2.1) beschreibbar. Diese Gleichungen sind prinzipiell numerisch näherungsweise lösbar. Die Problematik dieser Vorgehensweise liegt aber in der Struktur turbulenter Strömungen begründet. Um bei dieser Art der Berechnung die Strömung realistisch zu approximieren, müssen auch die kleinsten Schwankungsskalen sowohl räumlich als auch zeitlich erfasst werden. Diese Forderung stellt extrem hohe Ansprüche an das verwendete Rechenverfahren, sowie die Rechenressourcen. Daher ist es plausibel, dass die direkte Integration des Gleichungssystems für die zeitabhängigen Momentanwerte der Strömung, bekannt als Direkte Numerische Simulation, bestenfalls von akademischem Interesse sein kann und wenig Bedeutung für anwendungsorientierte Lösungen besitzt. Da man aus Anwendersicht mehr an der Entwicklung statistischer Mittelwerte im Gegensatz zu Einzelheiten eines momentanen Strömungsfeldes interessiert ist, beschränkt man sich daher häufig in der Strömungssimulation auf die Berechnung dieser Mittelwerte der turbulenten Strömung.

Bevor die Grundgleichungen für die mittlere Bewegung turbulenter Strömungen notiert werden, ist ein kurzer Ausblick auf den Schichtencharakter wandgebundener Turbulenz sinnvoll. Denn die Betrachtungen dazu ergeben unmittelbare Einsichten in die wandnahen turbulenten Erscheinungen und führen zu analytischen Vergleichslösungen.

### 3.2.1 Schichtenstruktur wandgebundener Turbulenz

Wandgebundene Strömungen weisen generell die Charakteristik auf, dass auf Grund der Haftbedingung die Relativgeschwindigkeit zwischen Fluid und umströmter Oberfläche direkt an der Oberfläche verschwindet. Dies führt dazu, dass sich normal zur Oberfläche ein Geschwindigkeitsprofil ausbildet, welches sich solange verändert, bis der von der Oberfläche unbeeinflusste Zustand des Fluids erreicht wird. Eine solche Strömungsform ist nach Prandtl in die zwei Bereiche der wandnahen Grenzschicht und der freien Außenströmung unterteilbar. Die Grenzschicht zeichnet sich insbesondere durch starke Änderungen der Strömungsgrößen normal zur Oberfläche aus, während die freie Außenströmung nur mittelbar durch die Oberfläche, etwa durch Strömungsumlenkung, beeinflusst wird.

Bei eingehender Untersuchung turbulenter Grenzschichten normal zur Oberfläche ist festzustellen, dass sich zudem diese Grenzschicht selbst durch eine Zweischichten-Struktur auszeichnet. Diese besteht aus einer sehr dünnen wandnahen Schicht, im Folgenden als viskose Unterschicht bezeichnet, in der der turbulente Impulsaustausch von untergeordneter Bedeutung gegenüber dem molekularen Austausch ist, und aus einem weitaus größeren vollturbulenten Bereich, in dem der molekulare Impulsaustausch gegenüber dem turbulenten vernachlässigbar ist. Letzterer wird nachfolgend als Überlappungsschicht bezeichnet. Beide Bereiche sind durch einen Übergangsbereich verbunden, in dem die turbulenten und molekularen Wirkungen von gleicher Größenordnung sind.

Eine quantitative Darstellung dieser Schichtenstruktur lässt sich am prägnantesten über die wandnormale Darstellung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeitskomponenten in Hauptströmungsrichtung erzielen. Dazu wird üblicherweise eine entdimensionierte oberflächennormale Koordinate gemäß

$$y^+ = \frac{\bar{\rho} u_\tau y}{\mu_m} \quad (3.7)$$

eingeführt. Dabei bezeichnet  $u_\tau$  die örtliche Schubspannungsgeschwindigkeit, die auf die Beziehung

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tilde{\tau}_w}{\bar{\rho}}} \quad (3.8)$$

zurückgeht, mit  $\tilde{\tau}_w$  als Favre-gemittelter Wandschubspannung. Zusätzlich wird die Favre-gemittelte Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung mit der Schubspannungsgeschwindigkeit zu

$$\tilde{u}^+ = \frac{\tilde{u}}{u_\tau} \quad (3.9)$$

entdimensioniert. Der Begriff der Favreschen Mittelung und dessen Notation wird im nachfolgenden Abschnitt erklärt und ist an dieser Stelle nicht maßgeblich von Belang. Aus der Favre-gemittelten Impulsgleichung

(s. Abs. 3.2.3) ist ein funktionaler Zusammenhang für die Geschwindigkeitskomponente der Hauptströmungsrichtung in Abhängigkeit von der dimensionslosen oberflächennormalen Koordinate  $y^+$  sowohl für die viskose Unterschicht als auch für den darüber liegenden Bereich herleitbar. Man erhält eine universelle Geschwindigkeitsverteilung (s. Abb. 3.4) innerhalb der viskosen Unterschicht zu

$$\tilde{u}^+ = y^+ \quad \text{für} \quad 0 \leq y^+ < 5. \quad (3.10)$$

Es besteht keine analytische Beziehung für den Übergangsbereich, der sich etwa über  $5 < y^+ < 70$  erstreckt. Die Beziehung der Überlappungsschicht lautet

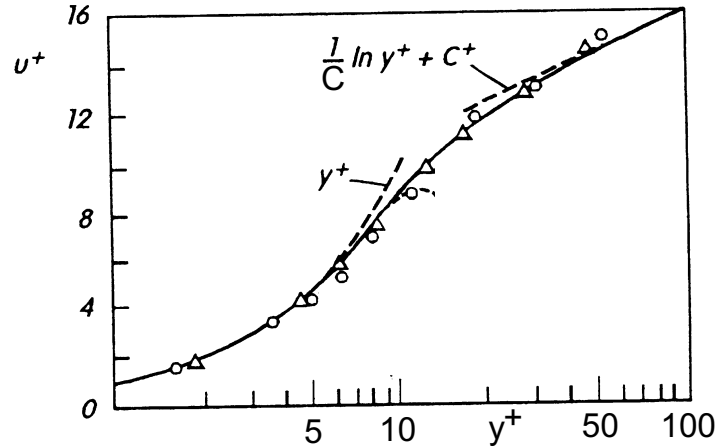


Abb. 3.4. Universelle Geschwindigkeitsverteilung einer vollturbulenten Grenzschicht

$$\tilde{u}^+ = \frac{1}{C_{\varkappa}} \ln y^+ + C^+ \quad \text{für} \quad 70 < y^+. \quad (3.11)$$

Die funktionale Beziehung für die Überlappungsschicht wird hier als logarithmisches Überlappungsgesetz bezeichnet, um Missverständlichkeiten, die durch den Begriff des universellen Wandgesetzes hervorgerufen werden, zu vermeiden. Denn das logarithmische Überlappungsgesetz verliert direkt an der Oberfläche seine Gültigkeit. Die Konstanten in der Beziehung für die Überlappungsschicht sind zum einen die von-Kármán-Konstante  $C_{\varkappa} \approx 0.41$  und die Integrationskonstante  $C^+ \approx 5.5$ , deren Werte experimentell bestimmt wurden. Die dimensionslosen Geschwindigkeitsverteilungen eignen sich sehr gut zur Verifikation experimentell und numerisch ermittelter Daten.

### 3.2.2 Widerstandsgesetz der längsangeströmten Platte

Aus der Berechnung der Wandschubspannungsverteilung lässt sich ein Widerstandsgesetz ableiten. Die Wandschubspannung wird dabei durch Anpassung der Geschwindigkeit von Defektschicht und viskoser Wandschicht (Gl. (3.11)). Bei Nutzung einer Defektformulierung für  $\tilde{u}$  bezeichnet die Defekt-Schicht denselben äußeren Grenzschichtbereich wie auch der Überlappungsbereich. Näheres zur Herleitung des Widerstandsgesetzes findet sich in [12, S. 599 ff.]. Die implizite Formulierung des Widerstandsgesetzes ergibt sich zu

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{C_{\varkappa}} \ln \left( \text{Re}_x \frac{c_f}{2} \right) + C^+ + \bar{C}. \quad (3.12)$$

Daraus lässt sich die explizit Formulierung des Widerstandsgesetzes ableiten als

$$c_f = 2 \left[ \frac{C_{\varkappa}}{\ln \text{Re}_x} G(\Lambda; D) \right]^2. \quad (3.13)$$

Die Funktion  $G(\Lambda(\ln \text{Re}_x); D)$  wird in detaillierter Weise in Anh. B erläutert. An dieser Stelle ist zu bemerken, dass diese Funktion  $G$  nur eine schwache Abhängigkeit von  $\ln \text{Re}_x$  im Bereich von  $10^5 < \text{Re}_x < 10^7$  aufweist. Daher wird in den Fällen, wo der lokale Reibungsbeiwert mit der analytischen Vergleichslösung aus (3.13) verglichen wird, im genannten interessanten Reynolds-Zahlenbereich  $G = 1.48$  gesetzt.



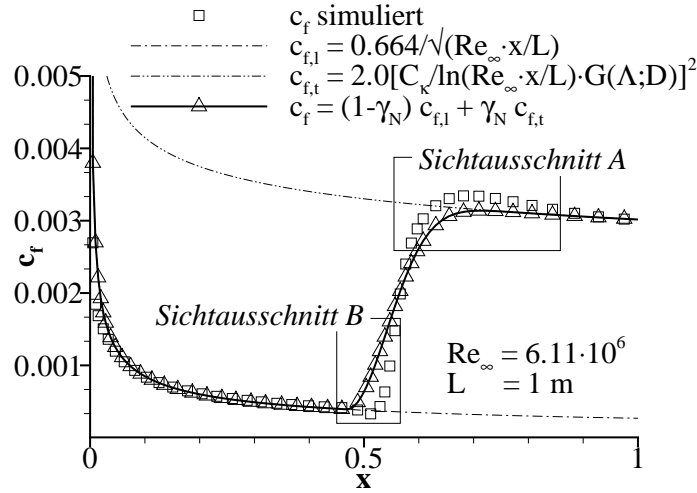


Abb. 3.5. Beispiel des lokalen Reibungsbeiwertes der einseitigen angeströmten ebenen Platte

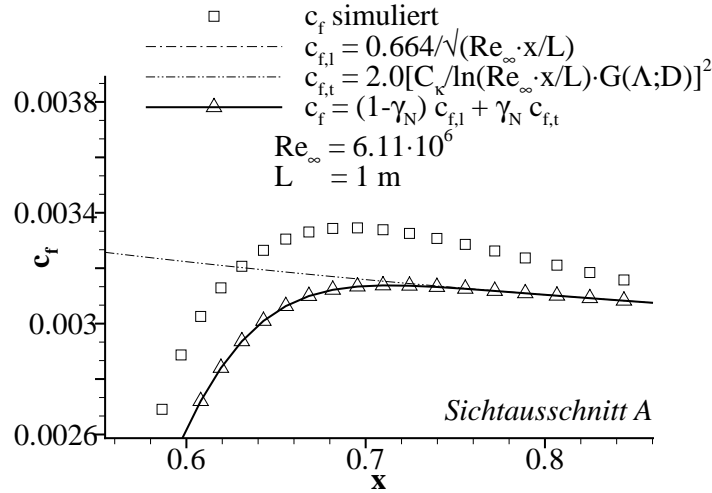


Abb. 3.6. Sichtausschnitt A der Abb. 3.5

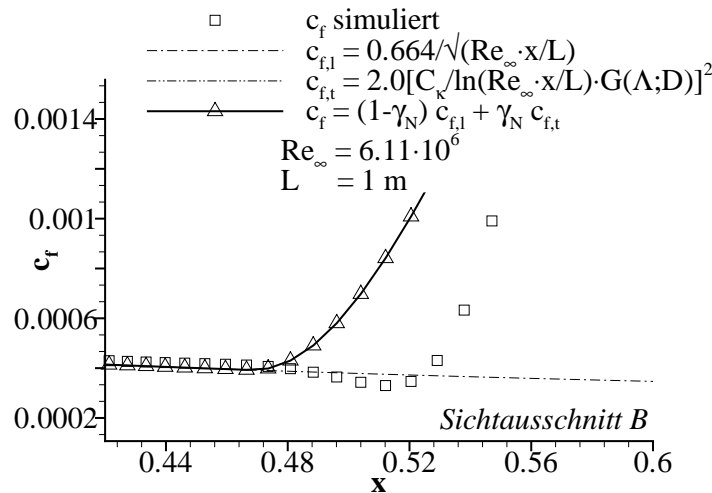


Abb. 3.7. Sichtausschnitt B der Abb. 3.5

Die Abb. 3.5 und die zugehörigen Sichtausschnitte Abb. 3.6 und 3.7 zeigen beispielhaft für eine Plattenströmung sowohl die analytische Lösung des lokalen Reibungsbeiwertes  $c_f$  von Blasius für die laminare Plattenströmung als auch das turbulente Widerstandsgesetz aus (3.13). Zusätzlich wird der lokale Reibungsbeiwert einer transitionellen Strömung unter Anwendung der Intermittenzfunktion  $\gamma_N$  aus (3.59) auf den Reibungsbeiwert gemäß

$$c_f = (1 - \gamma_N) c_{f,l} + \gamma_N c_{f,t}. \quad (3.14)$$

zusammengesetzt. Diese Handhabung wird als Linearkombination verstanden.  $c_{f,l}$  stellt den laminaren und  $c_{f,t}$  den turbulenten Reibungsbeiwert der entsprechenden Stelle  $Re_x = Re_{L,x}/L$  dar. Zum Vergleich ist eine transitionell simulierte Lösung hinzugefügt. Die zur Berechnung der Intermittenzfunktion benötigte Transitionslänge wurde gemäß den Zusammenhängen, die aus Abb. 3.10 hervorgehen, aus der Lage des lokalen Minimums und Maximums des Reibungsbeiwertes der transitionell simulierten Lösung bestimmt. Der Vergleich von Simulation und Linearkombinationen mittels der Intermittenzfunktion zeigt merkbare Unterschiede. Sichtausschnitt A zeigt das deutliche lokale Maximum des Reibungsbeiwertes der simulierten Lösung, während die linear kombinierte Lösung dieses Verhalten nicht zeigt. In Sichtausschnitt B nimmt der Reibungsbeiwert der simulierten Lösung ein lokales Minimum an. Wiederum ist dieser Verlauf bei der Linearkombination des Reibungsbeiwertes nicht erkennbar. Weiterhin ist zu bemerken, dass der Reibungsbeiwert der Linearkombination im Übergangsbereich weniger stark ansteigt. Zusätzlich nimmt der simulierte Reibungswert stromauf des lokalen Minimums etwas größere Werte im Vergleich mit der analytischen Lösung an.

### 3.2.3 Grundgleichungen für die mittlere Bewegung turbulenter Strömungen

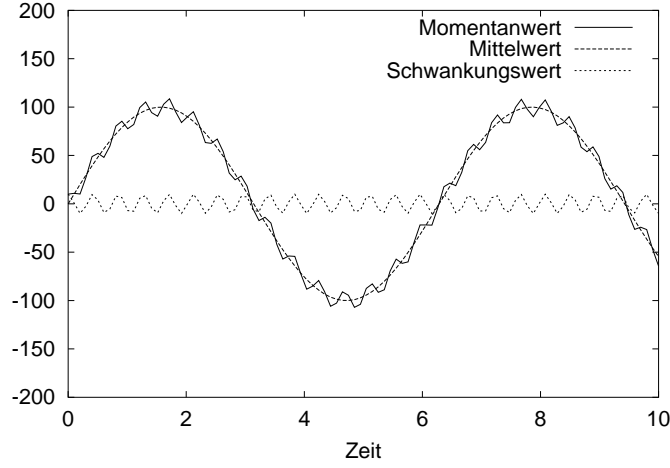
Das Aufstellen turbulenter Bewegungsgleichungen für die mittlere Bewegung ist grundsätzlich mit der Schwierigkeit verbunden, dass die turbulente Schwankungsbewegung stark an die mittlere Bewegung gekoppelt ist. So entstehen beim Aufstellen der Grundgleichungen für die mittlere Bewegung durch Anwendung der Reynoldsschen Dekomposition und zeitlicher Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen zusätzliche Terme, die durch die turbulente Schwankungsbewegung bestimmt werden. Diese Terme stellen zusätzliche Unbekannte bei der Berechnung der mittleren Bewegung dar. Somit müssen zur Schließung des Gleichungssystems zusätzliche Gleichungen entwickelt werden, die die aus der Schwankungsbewegung resultierenden Zusatzterme mit dem Geschwindigkeitsfeld der mittleren Bewegung in Verbindung bringen. Aus der Bilanzierung von Masse, Impuls und Energie sind diese erforderlichen Zusatzbeziehungen nicht mehr zu gewinnen. Daher spricht man im Zusammenhang mit dem Aufstellen der Zusatzgleichungen von Turbulenzmodellierung.

Im Folgenden werden die Grundgleichungen für die mittlere Bewegung turbulenter Strömungen notiert und die notwendige Modellierung der turbulenten Schwankungsbewegung als Schließungsansatz für das entstandene Gleichungssystem dargelegt. Zunächst sei jedoch die Reynoldssche und Favresche Dekomposition vorgestellt.

Ausgehend von der zeitlichen Entwicklung einer beliebigen Größe in einem statistisch stationären, turbulenten Strömungsfeld, kann man das ortsfest gemessene Signal dieser Größe in einen hochfrequenten Schwankungsanteil  $f'$  und einen zeitlichen Mittelwert  $\bar{f}$  aufspalten (s. Abb. 3.8). Es handelt sich hierbei um eine Art Filterung, die sich als

$$f = \bar{f} + f' \quad (3.15)$$

mit



**Abb. 3.8.** Reynoldssche Dekomposition eines Momentanwerts  $f$  in dessen Mittelwert  $\bar{f}$  und in dessen Schwankungswert  $f'$

$$\bar{f} = \frac{1}{T_{\text{turb}}} \int_t^{t+T_{\text{turb}}} f \, dt \quad \text{und} \quad \bar{f'} = 0 \quad (3.16)$$

ausdrücken lässt. Das betrachtete Zeitintervall  $T_{\text{turb}}$  ist gegenüber den turbulenten Zeitskalen sehr groß zu wählen.

Für die Beschreibung kompressibler Strömung hat sich eine Kombination der zeitlichen Mittelung nach Reynolds und der einer massengewichteten zeitlichen Mittelung nach Favre als vorteilhaft erwiesen:

$$f = \tilde{f} + f'' \quad (3.17)$$

mit

$$\tilde{f} = \frac{\bar{\rho} f}{\bar{\rho}}, \quad \overline{\rho f''} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{f''} = -\frac{\overline{\rho' f''}}{\bar{\rho}}. \quad (3.18)$$

Die üblich notierte Form der Bewegungsgleichungen für die mittlere Bewegung turbulenter Strömungen erhält man durch Anwendung einer kombinierten Reynoldsschen und Favreschen Mittelung auf die Momentanwerte der primitiven Größen  $f \in [\rho, \underline{v}, p, T]$ . Zusätzlich unterliegen nachfolgende Gleichungen der Annahme, dass die Morkovinsche Hypothese gültig ist [11]. Diese geht davon aus, dass turbulente Strukturen nicht von Schwankungen der Dichte abhängig sind, also  $\rho' \ll \bar{\rho}$ . Auch die gemittelten Erhaltungsgleichungen genügen der Beschreibung durch die integrale Formulierung aus (2.1). Lediglich der Vektor der konservativen Variablen  $\underline{U}$  und der Flussdichtevektor  $\underline{\underline{F}}(\underline{U})$  ergeben sich in abgeänderter Form. Unter Berücksichtigung der oben eingeführten Notationen für die Reynoldssche und Favresche Mittelung ergibt sich nach Anwendung der Mittelung der Vektor der konservativen Variablen zu

$$\underline{U} = [\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{\underline{v}}, \bar{\rho} \tilde{E}]^T. \quad (3.19)$$

Der konvektive Anteil des Flussdichtetensors  $\underline{\underline{F}}^k$  verbleibt nach Dekomposition und Mittelung in fast unveränderter Form zu (2.2) als

$$\underline{\underline{F}}^k(\underline{U}) = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{\underline{v}} \\ \bar{\rho} \tilde{\underline{v}} \tilde{\underline{v}}^T + \bar{\rho} \tilde{\underline{E}} \\ \bar{\rho} \tilde{H} \tilde{\underline{v}} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Der viskose Anteil des Flussspannungstensors  $\underline{\underline{F}}^v$  enthält nach Dekomposition und Mittelung zusätzliche Terme und ist wie folgt darstellbar

$$\underline{\underline{F}}^v(\underline{U}) = \underline{\underline{F}}_{\text{mol}}^v(\underline{U}) - \underline{\underline{F}}_{\text{turb}}^v(\underline{U}) \quad (3.21)$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\tilde{T}}} \\ \underline{\underline{\tilde{T}\tilde{v}}} - \underline{\underline{\tilde{q}}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}} \\ \underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}}\tilde{v} + \overline{\rho}h''\underline{\underline{v}}'' + \underline{\underline{T}}^T\underline{\underline{v}}'' + \overline{\rho}k\underline{\underline{v}}'' \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Dabei soll der Subskript <sub>mol</sub> auf den Anteil des molekularen viskosen Charakters im gemittelten Flussspannungstensor hinweisen, der die viskosen Effekte im Fluid nur auf Grund der mittleren Bewegung beschreibt. Der Subskript <sub>turb</sub> zeigt die zusätzlichen viskosen Effekte in der Strömung durch die Schwankungsbewegungen der Turbulenz an. Zudem ist hinzuzufügen, dass die Favre-gemittelte totale Energie  $E$  sich nicht mehr nur aus einem Anteil innerer Energie und einem Anteil kinetischer Translationsenergie zusammensetzt, sondern als weiteren durch die Dekomposition entstandenen Anteil die kinetische Turbulenzenergie  $\tilde{k}$  gemäß

$$\tilde{E} = \tilde{e} + \frac{\tilde{v}\tilde{v}}{2} + \tilde{k} \quad \text{mit} \quad \tilde{k} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\widetilde{v''v''}}}. \quad (3.23)$$

enthält.

Den zusätzlich durch die Dekomposition entstandenen Termen in der Impuls- und Energiebilanz werden nachfolgend physikalische Eigenschaften zugewiesen. In Anlehnung an den viskosen Spannungstensor als Resultat molekularer Reibungseffekte spricht man bei  $\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}}$  vom Favre-gemittelten Reynoldsspannungstensor

$$\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}} = \overline{\rho}\underline{\underline{\widetilde{v''v''}^T}}. \quad (3.24)$$

Zwischen der kinetischen Turbulenzenergie und der Spur des Reynoldsspannungstensors besteht der Zusammenhang

$$\overline{\rho}\tilde{k} = \frac{1}{2}\overline{\rho}\underline{\underline{\widetilde{v''v''}}} = \frac{1}{2}|\text{Sp}(\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}})|. \quad (3.25)$$

Die Terme  $\overline{\rho}h''\underline{\underline{\widetilde{v''}}}$ ,  $\underline{\underline{\widetilde{T}\tilde{v}}}$  und  $\overline{\rho}k\underline{\underline{\widetilde{v''}}}$ , die den turbulenten Wärmetransport, die molekulare Diffusion und den turbulenten Transport der kinetischen Turbulenzenergie physikalisch beschreiben, werden oft vernachlässigt. Diese Vernachlässigung trifft auch auf die Diskretisierung der Bilanzgleichungen im Strömungslöser *FLOWer* zu.

Der viskose Spannungstensor  $\underline{\underline{\tilde{T}}}$  ist entsprechend der Mittelung nun zu schreiben als

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \mu_m \left( 2\underline{\underline{\tilde{S}}} - \frac{2}{3}(\nabla\tilde{v})\underline{\underline{E}} \right). \quad (3.26)$$

In Analogie zum Newtonschen Materialgesetz hinsichtlich des Zusammenhangs von mittlerem, molekularem Spannungstensor und mittlerem Dehnratentensor schlug Boussinesq einen Zusammenhang zur Modellierung des Reynoldsspannungstensors  $\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}}$  vor. Die Idee basiert auf der Annahme, dass sich die turbulenten Wirbelstrukturen ähnlich den molekularen Austauschwirkungen wie makroskopische Moleküle verhalten. Danach sind die Spannungen auf der Grundlage turbulenter Schwankungsbewegungen unter Einführung einer unbekannten turbulenten Wirbelviskosität  $\mu_t$  als linear abhängig vom Favre-gemittelten Dehnratentensor angesetzt worden. Dies kann als

$$\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}} = \mu_t \left( 2\tilde{\underline{\underline{S}}} - \frac{2}{3} (\nabla \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{E}} \right) - \frac{2}{3} (\tilde{\underline{\underline{\rho k}}}) \underline{\underline{E}} \quad (3.27)$$

geschrieben werden. Um die Spur des Reynoldsspannungstensors richtig abzubilden, besteht der Zusatz  $2/3(\tilde{\underline{\underline{\rho k}}})\underline{\underline{E}}$  gegenüber (2.7) und ist auch als turbulenter Druckanteil, hervorgerufen durch kinetische Turbulenzenergie, interpretierbar. Der Dehnratentensor verbleibt in Abhängigkeit von den Geschwindigkeitsgradienten der mittleren Bewegung als

$$\tilde{\underline{\underline{S}}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \underline{\underline{v}}^T + \underline{\underline{v}} \nabla^T \right). \quad (3.28)$$

Es ist zu beachten, dass die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t$  keine Stoffgröße darstellt. Es existiert nun also eine Summe aus molekularem (laminarem) und turbulentem Viskositätsanteil zu

$$\mu = \mu_m + \mu_t. \quad (3.29)$$

Die molekulare Viskosität ist nach wie vor durch das Sutherland-Gesetz, Gl. (2.13) als Funktion der Temperatur bestimmbar. In Anlehnung an die Reynolds-Analogie ist nunmehr der gesamte Wärmeleitungskoeffizient  $K$  gegeben als

$$K = K_m + K_t = c_p \left( \frac{\mu_m}{\text{Pr}_m} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right). \quad (3.30)$$

Die turbulente Prandtl-Zahl  $\text{Pr}_t$  wird im Allgemeinen als Konstante im gesamten Strömungsfeld angenommen (für Luft:  $\text{Pr}_t = 0.9$ ).

Innerhalb der statistischen Turbulenzmodellierung bildet der Ansatz von Boussinesq die Grundlage für die so genannten Wirbelviskositätsmodelle. Durch diesen Ansatz wurde das turbulente Gleichungsproblem mit den zusätzlichen sechs unbekannten Reynoldsspannungen auf eine unbekannte Wirbelviskosität zurückgeführt. Um das Gleichungssystem nun zu schließen, bedarf es weiterer Modellgleichungen. Da die vorliegende Arbeit auf der Verwendung des  $k$ - $\omega$ -Zweigliederturbulenzmodell nach Wilcox beruht, werden im Folgenden lediglich die Aspekte dieses speziellen Wirbelviskositätsmodells erörtert.

### 3.2.4 $k$ - $\omega$ -Zweigliederturbulenzmodell

Zweigliederturbulenzmodelle bestehen entsprechend des Namens aus jeweils einer Transportgleichung für je eine charakteristische turbulente Größe. Beide Gleichungen werden dazu verwendet, um die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t$  zu ermitteln. Das hier vorgestellte Turbulenzmodell verwendet neben der mittleren kinetischen Turbulenzenergie  $k$  als weitere Modellgröße die mittlere turbulente Dissipationsrate, die durch

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\beta^*} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} \quad (3.31)$$

gegeben ist, mit  $\beta^* = 9/100$ . Es handelt sich bei der Dissipationsrate um die Dissipation turbulenter kinetischer Energie pro Einheit derselben. Die Dissipationsrate hat die Einheit  $1/\text{s}$ . In (3.31) bezeichnet  $\tilde{\varepsilon}$  die mittlere turbulente Dissipation. Aus dimensionsanalytischen Überlegungen ergibt sich daraus für die turbulente dynamische Wirbelviskosität

$$\mu_t = \tilde{\rho} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}}. \quad (3.32)$$

Nachfolgend werden die Transportgleichungen für die kinetische Turbulenzenergie und die Dissipationsrate in integraler Formulierung notiert.

Die Bilanzgleichungen für die zuvor genannten turbulenten Größen ergibt sich kompakt zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \underline{U} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \underline{\underline{F}}(\underline{U}) \underline{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \underline{Q} d\mathcal{V} \quad (3.33)$$

mit

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \widetilde{\rho \mathbf{k}} \\ \widetilde{\rho \tilde{\omega}} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^k - \underline{\underline{F}}^v = \begin{bmatrix} \widetilde{\rho \mathbf{k} \tilde{v}} \\ \widetilde{\rho \tilde{\omega} \tilde{v}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mu_m + \sigma^* \mu_t) \nabla \mathbf{k} \\ (\mu_m + \sigma \mu_t) \nabla \tilde{\omega} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

und dem Quelltermvektor  $\underline{Q}$ , der die für die Turbulenzmodellierung entscheidenden Produktions- (P) und Dissipationsterme (DS) enthält,

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_k \\ Q_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_k - DS_k \\ P_\omega - DS_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}} : \underline{\underline{\tilde{S}}} - \beta^* \widetilde{\rho \tilde{\omega} \mathbf{k}} \\ \alpha \frac{\tilde{\omega}}{\mathbf{k}} \underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}} : \underline{\underline{\tilde{S}}} - \beta \widetilde{\rho \tilde{\omega}^2} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Durch Ausformulierung der zweifachen Überschiebung des Tensors  $\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}}$  mit dem Tensor  $\underline{\underline{\tilde{S}}}$  ergibt sich der Produktionsterm  $P_k$  zu einer skalaren Größe:

$$P_k = \mu_t \tilde{S}^* - \frac{2}{3} \widetilde{\rho \mathbf{k}} \underbrace{(\nabla \tilde{v})}_{\text{Sp}(\underline{\underline{\tilde{S}}})}. \quad (3.36)$$

Dabei ist die Größe  $\tilde{S}^*$  gegeben durch

$$\tilde{S}^* = 2\tilde{S}^2 - \frac{2}{3} |\text{Sp}(\underline{\underline{\tilde{S}}})|^2 \quad (3.37)$$

mit der zweiten Invarianten des Dehnratentensors  $\tilde{S} = \sqrt{\underline{\underline{\tilde{S}}} : \underline{\underline{\tilde{S}}}}$ . Die Formulierung  $\underline{\underline{\tilde{S}}} : \underline{\underline{\tilde{S}}}$  ist gegeben durch  $\underline{\underline{\tilde{S}}} : \underline{\underline{\tilde{S}}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\underline{A}}_{ij} \underline{\underline{B}}_{ji}$  und stellt die zweifache Überschiebung des Dehnratentensor mit sich selbst dar.

Durch Nutzung der vorangegangenen Beziehung (3.32) ist der Quellterm  $\underline{Q}$  neu formulierbar als

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \mu_t \tilde{S}^* - \frac{2}{3} \widetilde{\rho \mathbf{k}} (\nabla \tilde{v}) - \beta^* \widetilde{\rho \tilde{\omega} \mathbf{k}} \\ \alpha \widetilde{\rho \tilde{S}^*} - \alpha \widetilde{\rho \tilde{\omega}} (\nabla \tilde{v}) - \beta \widetilde{\rho \tilde{\omega}^2} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Der Quellterm für die turbulente Dissipationsrate  $Q_\omega$  lässt sich zudem als Funktion aus Produktion und Dissipation der kinetischen Turbulenzenergie  $\mathbf{k}$  wie folgt darstellen:

$$Q_\omega = \frac{\tilde{\omega}}{\widetilde{\mathbf{k}}} \left( \alpha P_k - \frac{\beta^*}{\beta} DS_k \right). \quad (3.39)$$

Diesem Sachverhalt kommt später noch nähere Bedeutung zu. Die Schliessungskoeffizienten werden für das vorliegende Modell als

$$\alpha = 5/9, \quad \beta = 3/40, \quad \beta^* = 9/100, \quad \sigma^* = 1/2, \quad \sigma = 1/2 \quad (3.40)$$

angegeben. Die vorangegangene Modellformulierung basiert auf den Arbeiten von Wilcox [13].

Die Transportgleichungen für  $\tilde{k}$  und  $\tilde{\omega}$  enthalten zusätzliche Kompressibilitätsterme, die in der vorangegangenen Darstellung vernachlässigt wurden. Um Kompressibilitätseffekte dennoch miteinzubeziehen, wird üblicherweise der Turbulenzkoeffizient  $\beta^*$  in verschiedenen Ansätzen als Funktion einer turbulenten Mach-Zahl  $Ma_t = \sqrt{2\tilde{k}}/a$ , mit  $a$  als lokaler Schallgeschwindigkeit notiert. So ersetzt beispielsweise ein Ansatz die Koeffizienten  $\beta^*$  und  $\beta$  durch folgende kompressibilitätskorrigierte Koeffizienten

$$\beta_C^* = \beta^* (1 + Ma_t^2), \quad \beta_C = \beta - \beta^* Ma_t^2. \quad (3.41)$$

In der vorliegenden Arbeit werden Kompressibilitätseffekte hinsichtlich des Transports von  $\tilde{k}$  und  $\tilde{\omega}$  vernachlässigt.

Nachfolgend sei ein üblicher Weg zur Modellierung von Strömungsgrößen im Übergangsgebiet von laminarem zu turbulentem Strömungszustand aufgezeigt.

### 3.2.5 Intermittenzverteilung beim Transitionsprozess

Von Dhawan und Narasimha [14] wurde für die Strömung der längsangeströmten Platte eine transitionelle Verteilungsfunktion empirisch abgeleitet, die es ermöglicht den transitionellen Prozess der Strömungsgrößen von laminarer zu turbulenter Form quantitativ zu modellieren. Diese Funktion wird gemeinhin als Intermittenzfunktion bezeichnet und ist dokumentiert als

$$\gamma_N(s) = 1 - e^{-A\xi^2} \quad (3.42)$$

mit  $A$  als Konstante des Wertes 0.412 und

$$\xi = \frac{\max(s - s_t, 0)}{\lambda}. \quad (3.43)$$

Die Größe  $\xi$  stellt eine normalisierte Koordinate in Hauptströmungsrichtung im transitionellen Gebiet dar.  $s$  ist dabei eine krummlinige Koordinate entlang der Strömungsoberfläche mit Ursprung im Staupunkt ( $s = 0$ ).  $s_t$  kennzeichnet den Beginn des Transitionsprozess, der sich durch die Eigenschaft

$$s_t = s|_{\gamma=0.0} \quad (3.44)$$

auszeichnet.  $\lambda$  beschreibt die Ausdehnung zwischen den Punkten

$$\lambda = s|_{\gamma=0.75} - s|_{\gamma=0.25}. \quad (3.45)$$

Wenn man den Punkt abgeschlossener Transition durch

$$s_T = s|_{\gamma=0.99} \quad (3.46)$$

definiert, ergibt sich durch Auswertung der Abb. 3.9

$$\xi = \frac{s_T - s_t}{\lambda} = \frac{L_T}{\lambda} = 3.36, \quad (3.47)$$

mit  $L_T$  als der eigentlichen Transitionslänge. Es gilt dementsprechend für die Transitionslänge

$$L_T = 3.36 \lambda. \quad (3.48)$$

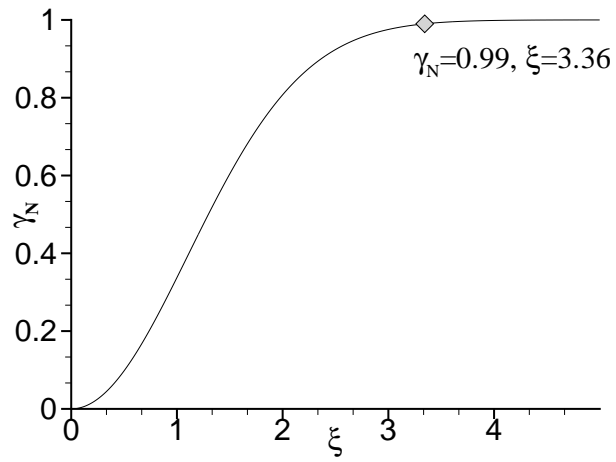


Abb. 3.9. Intermittenzverteilung

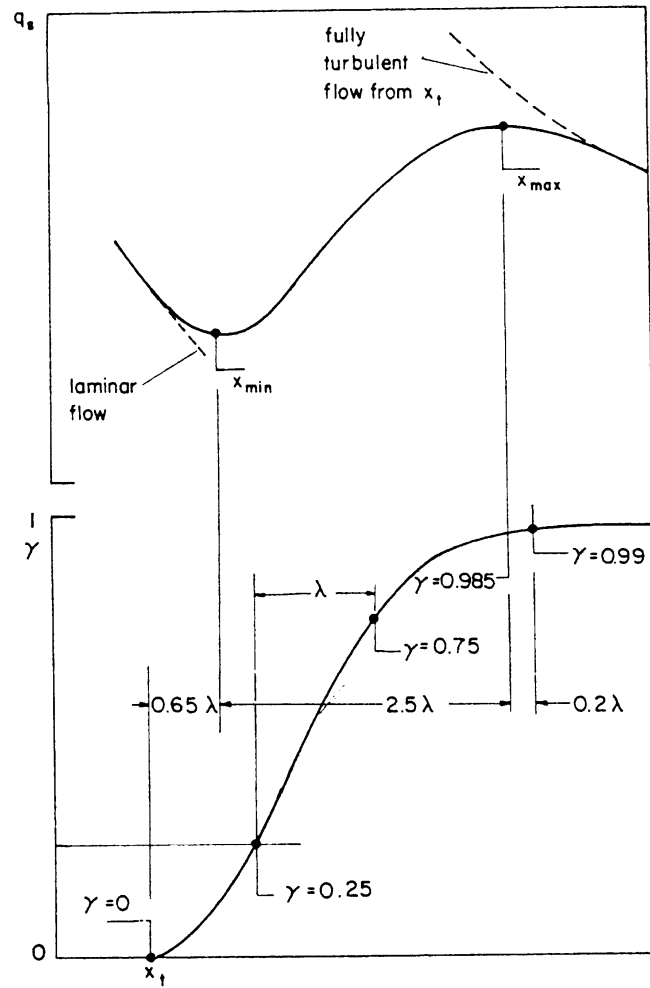


Abb. 3.10. Intermittenz und Transitionslänge



Die Intermittenzfunktion ist dazu geeignet, die Strömungsgrößen entlang der Transitionsregion als Mischung einer laminaren Grenzschicht beginnend an der Plattenvorderkante und einer turbulenten Grenzschicht beginnend bei  $s_t$  in den Anteilen  $1 - \gamma_N$  und  $\gamma_N$  darzustellen. Die Intermittenzfunktion aus (3.42) ist in Abb. 3.9 über der Koordinate  $\xi$  grafisch aufgetragen. Die Beziehung der Länge  $\lambda$ , wie sie durch (3.45) gegeben ist, zur Intermittenzverteilung, wird durch Abb. 3.10 verdeutlicht.

Gl. (3.42) stellt unabhängig von der Ursache der Transition eine universelle Intermittenzverteilung dar. Dies beinhaltet, dass in Beziehungen der Koordinate  $\xi$  die Ausdehnung der Transitionsregion stets die Gleiche ist. Experimentelle Ergebnisse der Transition der Plattengrenzschicht ergaben eine Beziehung zwischen der Reynolds-Zahl  $Re_{s_t}$ , die gebildet wird mit der Lage des Transitionsbeginns  $s_t$ , und der Reynolds-Zahl  $Re_\lambda$ , die mit der Länge  $\lambda$  gemäß (3.45) gebildet wird. Abb. 3.11 zeigt diesen

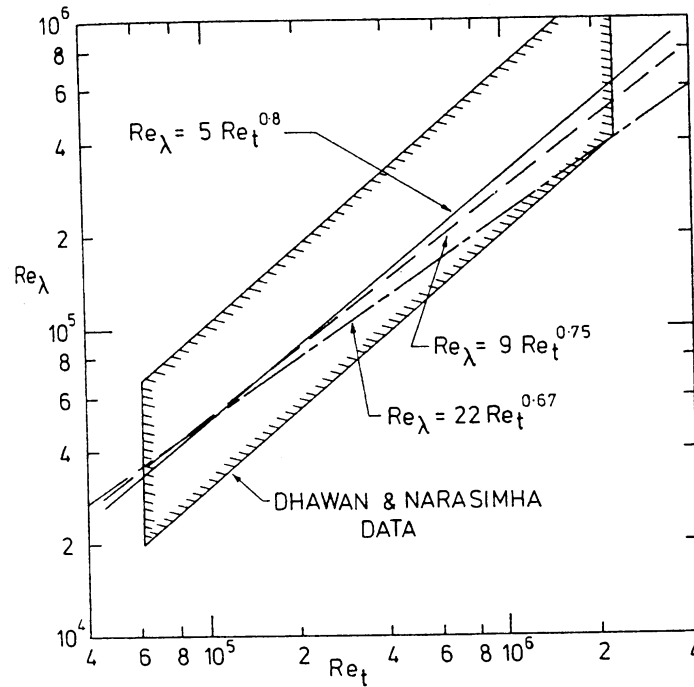


Abb. 3.11. Korrelation zwischen  $Re_{s_t}$  und  $Re_\lambda$

Zusammenhang. Aus dieser Abbildung ist der Zusammenhang allgemein darstellbar als

$$Re_\lambda = A Re_{s_t}^B. \quad (3.49)$$

Dhawan und Narasimha schlugen für die Koeffizienten die Werte  $A = 5.0$  und  $B = 0.8$  vor. Für eine verbesserte Konsistenz mit theoretischen Überlegungen änderte Narasimha diese Werte zu  $A = 9.0$  und  $B = 0.75$ . Cebeci und Smith [15] leiteten die Koeffizienten aus ihrer Transitionshypothese zu  $A = 22.0$  und  $B = 0.67$  ab. Dies führt, wie in Abb. 3.11 zu sehen ist, für  $Re_{s_t} > 10^6$  zu wesentlich kleineren Transitionsängen gegenüber den beiden anderen Varianten.

Des Weiteren existiert in [16] ein Modell von McCormick [17] für eine minimale Transitionslänge. Zahlreiche Studien haben gezeigt, dass die dominante Störungsfrequenz, die zur Transition führt, sehr gut durch die Frequenz der Tollmien-Schlichting-Instabilität mit der maximalen Verstärkungsrate approximiert wird. Aus Stabilitätsrechnungen für Falkner-Skan Profile lässt sich schließlich eine Beziehung für diese Frequenz ableiten. Daraus ist eine Reynolds-Zahlbeziehung für die minimale Länge  $\lambda$ ,

die nach der Theorie bei Transitionsprozessen auftreten kann, zu

$$\text{Re}_\lambda = 1.55 \text{Re}_{s_t}^{0.75} \quad (3.50)$$

ermittelbar. Für alle Beziehungen lässt sich eine explizite Formulierung für  $\lambda$  mittels

$$\frac{\lambda}{s_t} = \frac{A}{\text{Re}_{s_t}^{1-B}}. \quad (3.51)$$

erlangen.

Für komplexe Strömungskonfigurationen, beispielsweise Profilkonfigurationen mit mehreren Komponenten, die gleichzeitig wandgebundene Grenzschichten und freie Scherschichten aufweisen, wird eine mehrdimensionale Intermittenzfunktion entwickelt. Diese Intermittenzfunktion begrenzt transitionelle Effekte auf den Bereich der eigentlichen Grenzschicht. Sie ist definiert zu

$$\gamma_b(s, r) = \tanh(\eta^2) \quad (3.52)$$

mit

$$\eta = \frac{\max(0, \max(t_1, t_2) - t_\infty)}{t_3 + t_\infty} \quad (3.53)$$

$$t_1 = \frac{500\mu_m}{\rho d^2} \quad (3.54)$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{(\mu_m + \mu_t)} \Omega / \rho}{\beta^{*1.5} d} \quad (3.55)$$

$$t_3 = \sqrt{\beta^*} \Omega \quad (3.56)$$

$$t_\infty = 1 \cdot 10^{-7} \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\mu_{m,\infty}} \quad (3.57)$$

und  $d$  als nächstem Oberflächenabstand,  $r$  als Koordinate orthogonal zur Oberfläche und  $\Omega$  als euklidische Norm des Wirbelvektors  $\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v}$  gemäß  $\Omega = \sqrt{\underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}}$ .  $\gamma_b$  nimmt in der Nähe der Oberfläche den Wert eins an und verläuft in Richtung des Grenzschichtrandes stark asymptotisch gegen null. Beide zuvor genannten Intermittenzverteilungen sind über die Beziehung

$$\gamma(s, r) = 1 + \gamma_b(s, r) (\gamma_N(s) - 1) \quad (3.58)$$

zu einer Verteilung zusammenzuführen. Für einfache Strömungsfälle reduziert sich die Formulierung aus (3.58) zu

$$\gamma(s, r) = \gamma_N(s). \quad (3.59)$$

Die Formulierung aus (3.59) ist diejenige, welche in dieser Arbeit angewendet wurde.

Abschließend sei bemerkt, dass die zuvor beschriebenen Intermittenzverteilungen zu unterscheiden sind von der oftmals in der Literatur dargestellten Randintermittenz. Diese dient der Beschreibung der fluktuierenden Berandung turbulenter Gebiete in oberflächennormaler Richtung bei vollturbulenter Strömung. Denn der Rand der turbulenten Grenzschicht ist eine sowohl räumlich als auch zeitlich schwankende Fläche. Die Formulierung aus (3.52) kommt diesem Beschreibungszusammenhang gegenüber der Formulierung aus (3.42) am Ehesten nahe. Der Wert der Randintermittenz definiert dabei die Wahrscheinlichkeit an der Stelle  $s, r$  einen turbulenten Strömungszustand anzutreffen. Im vollturbulenten Gebiet gilt  $\gamma = 1$ , mit Übergang in die nicht-turbulente, drehungsfreie Außenströmung fällt diese Randintermittenz mehr und mehr bis  $\gamma = 0$  ab. Abb. 3.12 zeigt diesen Zusammenhang schematisch auf.

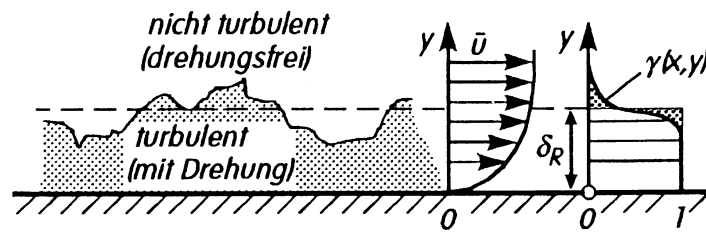


Abb. 3.12. Außenrand einer turbulenten Grenzschicht

## Modellspezifische Grundgleichungen des kombinierten Turbulenz- und Transitionsansatzes

Dieses Kapitel widmet sich der eigentlichen Beschreibung des in der vorliegenden Arbeit verwendeten alternativen Transitionsmodells in analytischer Weise. Wie schon in der Einleitung erwähnt, behandelt dieses kombinierte Transitions- und Turbulenzmodell nicht-turbulente Schwankungserscheinungen im Strömungsfeld in ähnlicher Weise wie die Turbulenz. Im klassischen Sinne werden turbulente Schwankungserscheinungen im Strömungsfeld durch Turbulenzmodelle auf der Basis von Transportgleichungen für charakteristische Turbulenzgrößen, wie beispielsweise die kinetische Turbulenzenergie  $\tilde{k}$  oder die turbulente Dissipationsrate  $\tilde{\omega}$ , beschrieben. Die Haupteigenschaften der Turbulenzmodelle basieren auf der Dekomposition von Strömungsgrößen in einen mittleren Anteil und einen Schwankungsanteil, sowie dem Wirbelviskositätsansatz. Die Dekompositionsmöglichkeit besteht unabhängig von der physikalischen Ursache der Schwankungen und ist somit auch in nicht-turbulenten (laminaren und transitionellen) Strömungszuständen gegeben. Die exakten analytischen Turbulenztransportgleichungen besitzen also auch für diese Strömungszustände ihre Gültigkeit.

Gegenüber der Turbulenz genügt es allerdings für den laminaren Strömungszustand lediglich einige wenige Schwankungsmoden und die zugehörigen Schwankungsfrequenzen abzubilden, die den Entwicklungsprozess hin zum transitionellen Strömungszustand dominieren. Die Transportgleichungen zur Turbulenzbeschreibung beinhalten keinen Fokus auf bestimmte Moden. In der Simulation der Turbulenz ist die Berechnung einzelner turbulenter Moden nicht relevant. Ein spezifisches Turbulenzmodell ist also im laminaren Bereich in spezieller Weise um empirische Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die signifikanten Moden des Strömungsübergangs zu erweitern. Diese Erweiterungen zur kombinierten Turbulenz- und Transitionsberechnung sind in [18] in Verbindung mit einem  $k$ - $\zeta$ -Zweiggleichungsturbulenzmodell beschrieben. Die zusätzlichen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen sind ähnlich dem Wirbelviskositätsansatz als zusätzliche Viskosität auf der Basis nicht-turbulenter Schwankungen im laminaren Bereich modelliert. Das Modell fügt der turbulenten Wirbelviskosität  $\mu_t$  eine nicht-turbulente Viskosität  $\mu_{nt}$ , gewichtet mit  $\gamma_N$  bzw.  $1 - \gamma_N$  über die Intermittenz  $\gamma_N$ , hinzu. Dies führt zu einer Gesamtviskosität auf der Grundlage von Strömungsfluktuationen gemäß

$$\mu_f = (1 - \gamma_N) \mu_{nt} + \gamma_N \mu_t. \quad (4.1)$$

Es existiert als eine Gesamtviskosität  $\mu_g$  als

$$\mu_g = \mu_m + \mu_f \quad (4.2)$$

mit  $\mu_m$  als molekularer Viskosität. Für komplexere Strömungsfälle ist gemäß den Äußerungen aus Kap. 3.2.5 zu verfahren, und eine Gesamtintermittenz  $\gamma$  mit Anteilen aus der Intermittenz nach Narasimha  $\gamma_N$  und einer mehrdimensionalen Intermittenzfunktion  $\gamma_b$  nach (3.58) in (4.1) zu verwenden.

Im Folgenden ist die Viskosität  $\mu_f$  stets als Fluktuationsviskosität bezeichnet. In den abgeleiteten Transportgleichungen für die mittlere Bewegung und den k- $\omega$ -Transportgleichungen ist die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t$  für die kombinierte Transitions-/Turbulenzmodellierung durch die Fluktuationsviskosität  $\mu_f$  zu ersetzen. Die Gleichungen gehen für eine voll-turbulente Strömung mit  $\gamma_N = 1$  in die voll-turbulenten Transportgleichungen über, denn die Fluktuationsviskosität  $\mu_f$ , die durch (4.1) beschrieben wird, ist in diesem Fall identisch mit der rein turbulenten Wirbelviskosität  $\mu_t$ .

Der Kern des Modells beruht auf der Bestimmung des nicht-turbulenten Anteils  $\mu_{nt}$  an der gesamten Fluktuationsviskosität  $\mu_f$ . Weil die Mechanismen, die verantwortlich sind für die Entwicklung zur Transition, abhängig sind von der Instabilitätsart, sind nachfolgend lediglich Beziehungen für  $\mu_{nt}$  beschrieben, die für Tollmien-Schlichting-Instabilitäten, nicht aber für Querströmungsinstabilitäten geeignet sind. Um letzteres abzubilden, sind die dafür gültigen Beziehungen aus [18] zu entnehmen.

Nachfolgend werden die speziellen Modellformulierungen, die in einer Kombination mit dem k- $\zeta$ -Turbulenzmodell in [18] dokumentiert sind, auf die Anwendung mit dem k- $\omega$ -Turbulenzmodell von Wilcox transformiert.

#### 4.1 Modelltransformation in k- $\omega$ -Formulierung

Die Transitionsmodellbeschreibung in [18] beruht auf der Turbulenzbeschreibung über die charakteristischen Turbulenzgrößen k und  $\zeta$ . Das k- $\zeta$ -Turbulenzmodell entstammt der Entwicklung in [19].  $\zeta$  bildet eine Art rotatorische Turbulenzenergie. Die Turbulenzgröße  $\zeta$  wird in [19] notiert als  $\tilde{\zeta} = \underline{\underline{\Omega}}'' \underline{\underline{\Omega}}''$  mit  $\underline{\underline{\Omega}}$  als Drehgeschwindigkeitsvektor, der gegeben ist durch  $\underline{\underline{\Omega}} = \nabla \times \underline{\underline{v}}$ . Der Notation liegen die Schreibweisen der Favreschen Mittelung zu Grunde. Relevant für die Übertragung der modellspezifischen Gleichungen in eine k- $\omega$ -Formulierung ist ausschließlich die Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie, da die Transportgleichung für  $\zeta$  vom Transitionsmodell außer durch die Auswirkung der Fluktuationsviskosität  $\mu_f$  anstelle der rein durch die Wirkung der Turbulenz begründeten Wirbelviskosität  $\mu_t$  unbeeinflusst bleibt. Eine zusätzliche Änderung, die das Transitionsmodell vornimmt, beschränken sich auf den Dissipationsterm  $DS_k$  der Transportgleichung der kinetischen Turbulenzenergie.

Mit der Bilanzgleichung aus (3.33) wird die Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie  $\tilde{k}$  aus [18] durch

$$\underline{\underline{U}} = \left[ \tilde{\rho} \tilde{k}^{k,\zeta} \right] \quad (4.3)$$

und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{F}}^k - \underline{\underline{F}}^v \\ &= \left[ \tilde{\rho} \tilde{k}^{k,\zeta} \tilde{\underline{\underline{v}}} \right] - \left[ \left( \phi \mu_m + \psi \mu_f^{k,\zeta} \right) \nabla \tilde{k}^{k,\zeta} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

notiert. Das Superskript  $^{k,\zeta}$  deutet die Modellherkunft der Größe aus dem k- $\zeta$ -Turbulenzmodell an. In Gl. (4.3) und (4.4) sind die Koeffizienten  $\phi = 1/3$  und  $\psi = 9/5$ . Hingegen ist zu bemerken, dass in (3.34) diese Koeffizienten die Werte  $\phi = 1$  und  $\psi = 1/2$  annehmen. Der Quelltermvektor ist hier, nur für die k-Gleichung, gegeben durch

$$\underline{\underline{Q}} = \left[ Q_k^{k,\zeta} \right] = \left[ P_k^{k,\zeta} - DS_k^{k,\zeta} \right] = \left[ \underline{\underline{\mathcal{P}}}_{\text{turb}}^{k,\zeta} : \tilde{\underline{\underline{S}}} - \tilde{\rho} \frac{\tilde{k}^{k,\zeta}}{\tilde{\tau}_k^{k,\zeta}} \right] \quad (4.5)$$

mit  $\tilde{\tau}_k^{k,\zeta}$  als charakteristischer, turbulenter Dissipationszeit für das k- $\zeta$ -Turbulenzmodell. Für diese wird ein Zusammenhang in [18] im Rahmen des k- $\zeta$ -Modells notiert als

$$\frac{1}{\tilde{\tau}_k^{k,\zeta}} = \frac{1 - \gamma_N}{\tilde{\tau}_{k,nt}^{k,\zeta}} + \frac{\gamma_N}{\tilde{\tau}_{k,t}^{k,\zeta}} \quad (4.6)$$

mit  $\tilde{\tau}_{k,nt}^{k,\zeta}$  und  $\tilde{\tau}_{k,t}^{k,\zeta}$  als nicht-turbulentem und turbulentem Anteil an der Dissipationszeit. Die Fluktuationsviskosität  $\mu_f^{k,\zeta}$  wird in [18] im Rahmen des k- $\zeta$ -Modells als

$$\mu_f^{k,\zeta} = \beta^* \bar{\rho} \tilde{k}^{k,\zeta} \tilde{\tau}_\mu^{k,\zeta} \quad (4.7)$$

dargestellt, mit

$$\tilde{\tau}_\mu^{k,\zeta} = (1 - \gamma_N) \tilde{\tau}_{\mu,nt}^{k,\zeta} + \gamma_N \tilde{\tau}_{\mu,t}^{k,\zeta}. \quad (4.8)$$

Die Größen  $\tilde{\tau}_{k,t}^{k,\zeta}$  und  $\tilde{\tau}_{\mu,t}^{k,\zeta}$  werden in [18] durch

$$\tilde{\tau}_{k,t}^{k,\zeta} = \tilde{\tau}_{\mu,t}^{k,\zeta} = \frac{\tilde{\rho} \tilde{k}^{k,\zeta}}{\mu_m \tilde{\zeta}} \quad (4.9)$$

beschrieben.

In voll-turbulenten Strömungsbereichen ( $\gamma_N = 1$ ) ergibt sich für das in [18] dokumentierte gekoppelte Transitions- und Turbulenzmodell auf der Basis der Turbulenzgrößen k und  $\zeta$  für den Dissipationssterm

$$DS_k^{k,\zeta} \Big|_{\gamma_N=1} = \bar{\rho} \tilde{\epsilon}_k^{k,\zeta} \Big|_{\gamma_N=1} = \bar{\rho} \frac{\tilde{k}^{k,\zeta}}{\tilde{\tau}_k^{k,\zeta}} \Big|_{\gamma_N=1} = \bar{\rho} \frac{\tilde{k}^{k,\zeta}}{\tilde{\tau}_{k,t}^{k,\zeta}} = \mu_m \tilde{\zeta}. \quad (4.10)$$

Für die Fluktuationsviskosität gilt – ebenfalls in Bezug auf das in [18] dokumentierte Transitions-/Turbulenzmodell – für voll-turbulente Bereiche

$$\mu_f^{k,\zeta} \Big|_{\gamma_N=1} = \beta^* \bar{\rho} \tilde{k}^{k,\zeta} \tilde{\tau}_\mu^{k,\zeta} \Big|_{\gamma_N=1} = \beta^* \bar{\rho} \tilde{k}^{k,\zeta} \tilde{\tau}_{\mu,t}^{k,\zeta} = \beta^* \frac{(\bar{\rho} \tilde{k}^{k,\zeta})^2}{\mu_m \tilde{\zeta}}. \quad (4.11)$$

Letzteres stimmt mit der Formulierung der turbulenten Wirbelviskosität  $\mu_t = \mu_t^{k,\zeta}$  überein, wie sie im Rahmen des k- $\zeta$ -Modells aus [19] verwendet wird.

Die Formulierung des Transitionsmodells in k- $\omega$ -Notation unterliegt der Bedingung, dass das Modell im vollturbulenten Strömungsbereichen ( $\gamma_N = 1$ ) das klassische k- $\omega$ -Turbulenzmodell nach Wilcox aus Kap. 3.2.4 abbildet. Daraus ergibt sich die Forderung, dass – unter Vernachlässigung der Unterschiede in den Koeffizienten  $\phi$  und  $\psi$  – die k- $\tau$ - $\zeta$ -Formulierung des Transitionsmodells (4.3-4.5) für den vollturbulenten Strömungsfall – im Ergebnis für die kinetische Turbulenzenergie  $\tilde{k}^{k,\zeta} \stackrel{!}{=} \tilde{k}^{k,\omega}$  – der k- $\omega$ -Formulierung des Turbulenzmodells (3.33 - 3.35) entsprechen muss. Ähnlich der Gestalt der Größen  $\tilde{\tau}_k^{k,\zeta}$  und  $\tilde{\tau}_\mu^{k,\zeta}$  werden nun entsprechende Größen  $\tilde{\omega}_k^{k,\omega}$  und  $\tilde{\omega}_\mu^{k,\omega}$  gesucht, die die zuvor genannte Forderung erfüllen. Nachfolgend wird keine Unterscheidung mehr zwischen den kinetischen Turbulenzenergien  $\tilde{k}^{k,\zeta}$  und  $\tilde{k}^{k,\omega}$  gemacht, da deren Gleichheit gefordert wird. Zur Bestimmung  $\tilde{\omega}_k^{k,\omega}$  und  $\tilde{\omega}_\mu^{k,\omega}$  wird zunächst die Gleichheit der Dissipationsterme

$$DS_k = \underbrace{\bar{\rho} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\tau}_k^{k,\zeta}}}_{DS_k^{k,\zeta}} \stackrel{!}{=} \underbrace{\beta^* \bar{\rho} \tilde{k} \tilde{\omega}_k^{k,\omega}}_{DS_k^{k,\omega}} \quad (4.12)$$

und der Fluktuationsviskosität

$$\mu_f = \underbrace{\beta^* \bar{\rho} \tilde{k} \tilde{\tau}_\mu^{k,\zeta}}_{\mu_f^{k,\zeta}} \stackrel{!}{=} \underbrace{\bar{\rho} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}_\mu^{k,\omega}}}_{\mu_f^{k,\omega}} \quad (4.13)$$

gefordert. Hieraus ergibt der Zusammenhang

$$\tilde{\omega}_k^{k,\omega} = \frac{1}{\beta^* \tilde{\tau}_k^{k,\zeta}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\tilde{\omega}_\mu^{k,\omega}} = \beta^* \tilde{\tau}_\mu^{k,\zeta}. \quad (4.14)$$

für die beiden gesuchten Größen. Dabei sind die Formulierungen für den Dissipationsterm und die Fluktuationsviskosität des Transitions-/Turbulenzmodells in k- $\omega$ -Notation zunächst willkürlich wählbar. Entscheidend für die Transformation der Notationen sind die Bestimmungsgleichungen für  $\tilde{\omega}_k^{k,\omega}$  und  $\tilde{\omega}_\mu^{k,\omega}$ , die sich dem willkürlichen Ansatz aus (4.12) und (4.13) anpassen. Allgemein wird nachfolgend die Umrechnung

$$\tilde{\tau}^{k,\zeta} = \frac{1}{\beta^* \tilde{\omega}^{k,\omega}} \quad (4.15)$$

zwischen Dissipationsrate  $\tilde{\omega}^{k,\omega}$  und Dissipationszeit  $\tilde{\tau}^{k,\zeta}$  genutzt.

Anschließend sind nun Bestimmungsgleichungen für beide gesuchten Größen zu entwickeln. Diese sollen den Bestimmungsgleichungen (4.6) und (4.8) ähneln. Über die Forderung

$$DS_k^{k,\omega} \Big|_{\gamma_N=1} = \bar{\rho} \tilde{\varepsilon}_k^{k,\omega} \Big|_{\gamma_N=1} = \beta^* \bar{\rho} \tilde{k} \tilde{\omega}_k^{k,\omega} \Big|_{\gamma_N=1} = \beta^* \bar{\rho} \tilde{k} \tilde{\omega}_{k,t}^{k,\omega} \quad (4.16)$$

lässt sich mit

$$DS_k^{k,\omega} \Big|_{\gamma_N=1} \stackrel{!}{=} DS_k^{k,\zeta} \Big|_{\gamma_N=1} \quad (4.17)$$

folgendes ableiten:

$$\tilde{\omega}^{k,\omega} = \tilde{\omega}_{k,t}^{k,\omega} = \frac{1}{\beta^* \tilde{\tau}_{k,t}^{k,\zeta}} = \frac{1}{\beta^*} \frac{\mu_m \tilde{\zeta}}{\bar{\rho} \tilde{k}}. \quad (4.18)$$

Da für die Notation der Größe  $\tilde{\zeta}$  in [18] indirekt  $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_{k,t} = \tilde{\zeta}_{\mu,t}$  gilt, wird hier entsprechend mit  $\tilde{\omega}$  verfahren, also  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{k,t} = \tilde{\omega}_{\mu,t}$ .

Nun wird analog für die Fluktuationsviskosität gehandelt. Es ergibt die Forderung

$$\mu_f^{k,\omega} \Big|_{\gamma_N=1} = \bar{\rho} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}_\mu^{k,\omega}} \Big|_{\gamma_N=1} = \bar{\rho} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}_{\mu,t}^{k,\omega}} = \mu_t^{k,\omega}. \quad (4.19)$$

Nun soll zwischen den Fluktuationsviskositäten des k- $\omega$ - und k- $\zeta$ -Modells Identität herrschen, also

$$\mu_f^{k,\omega} \Big|_{\gamma_N=1} \stackrel{!}{=} \mu_f^{k,\zeta} \Big|_{\gamma_N=1}. \quad (4.20)$$

Aus beiden zuvor genannten Beziehungen ergibt sich

$$\frac{1}{\tilde{\omega}^{k,\omega}} = \frac{1}{\tilde{\omega}_{\mu,t}^{k,\omega}} = \beta^* \tilde{\tau}_{\mu,t}^{k,\zeta} = \beta^* \frac{\tilde{\rho k}}{\mu_m \tilde{\zeta}} \quad (4.21)$$

Setzt man nun abschließend in die beiden Beziehungen aus (4.14) die Beziehungen (4.6) bzw. (4.8) ein, und nutzt die Umrechnungen aus (4.18) bzw. (4.21), so ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für  $\tilde{\omega}_{\mu}^{k,\omega}$  und  $\tilde{\omega}_k^{k,\omega}$  zu

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_{\mu}^{k,\omega}} = (1 - \gamma_N) \beta^* \tilde{\tau}_{\mu,nt}^{k,\zeta} + \gamma_N \frac{1}{\tilde{\omega}^{k,\omega}}. \quad (4.22)$$

und

$$\tilde{\omega}_k^{k,\omega} = \frac{1 - \gamma_N}{\beta^* \tilde{\tau}_{k,nt}^{k,\zeta}} + \gamma_N \tilde{\omega}^{k,\omega}. \quad (4.23)$$

Die Gleichungen für  $\tilde{\tau}_{k,nt}^{k,\zeta}$  und  $\tilde{\tau}_{\mu,nt}^{k,\zeta}$  werden zur Schließung des Gleichungssystems nachfolgend beschrieben. Nachfolgend entfällt der Superskript  $^{k,\omega}$ , da sich anschließend alle Formulierungen auf das k- $\omega$ -Modell beziehen. Insgesamt ergibt sich als Transformation der Modellgleichungen das Gleichungssystem der Transportgleichungen mit Hilfe der Beziehungen aus (4.22) und (4.23) zu

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho k} \\ \tilde{\rho \tilde{\omega}} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{F} = \underline{F}^k - \underline{F}^v = \begin{bmatrix} \tilde{\rho k \tilde{v}} \\ \tilde{\rho \tilde{\omega} \tilde{v}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mu_m + \sigma^* \mu_f) \nabla \tilde{k} \\ (\mu_m + \sigma \mu_f) \nabla \tilde{\omega} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

und

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_k \\ Q_{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{D}}_{\text{turb}} : \tilde{\underline{S}} - \beta^* \tilde{\rho \tilde{\omega} k} \\ \alpha \frac{\tilde{\omega}}{k} \underline{\mathcal{D}}_{\text{turb}} : \tilde{\underline{S}} - \beta \tilde{\rho \tilde{\omega}^2} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

An dieser Notationsart ist zu bemerken, dass der Dissipationsterm  $\text{DS}_{\omega}$  hier keine Funktion des Dissipationsterms  $\text{DS}_k$  darstellt. Der funktionale Zusammenhang war in (3.39) gegeben. Durch  $\mu_f^{k,\zeta} = \mu_f^{k,\omega}$  gilt auch die Gleichheit  $\underline{\mathcal{D}}_{\text{turb}}^{k,\zeta} = \underline{\mathcal{D}}_{\text{turb}}^{k,\omega}$ . Der Reynoldsspannungstensor ist abgeändert als

$$\underline{\mathcal{D}}_{\text{turb}} = \mu_f \left( 2\tilde{\underline{S}} - \frac{2}{3} (\nabla \tilde{v}) \underline{E} \right) - \frac{2}{3} (\tilde{\rho k}) \underline{E} \quad (4.26)$$

darzustellen. Die Fluktuationsviskosität  $\mu_f = \mu_f^{k,\omega}$  folgt dabei der Beziehung

$$\mu_f^{k,\omega} = \frac{\tilde{\rho k}}{\tilde{\omega}_{\mu}^{k,\omega}} = \frac{\tilde{\rho k}}{\tilde{\omega}_{\mu}} = \mu_f. \quad (4.27)$$

Insgesamt ergibt sich als zu lösende Bilanzgleichung die Kopplung aus Favre- und Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichung mit den Transportgleichungen für k und  $\tilde{\omega}$ . Dies ist in integraler Form abermals zu formulieren durch (3.33). Der Vektor der konservativen Variablen ist nun abschließend durch

$$\underline{U} = [\tilde{\rho}, \tilde{\rho \tilde{v}}, \tilde{\rho \tilde{E}}, \tilde{\rho k}, \tilde{\rho \tilde{\omega}}]^T \quad (4.28)$$

darstellbar. Der Quelltermvektor enthält lediglich Größen der Turbulenzmodellierung und ergeht zu

$$\underline{Q} = [0, 0, 0, 0, 0, Q_k, Q_{\omega}]^T. \quad (4.29)$$



Dabei werden  $Q_k$  und  $Q_\omega$  durch (4.25) ausgedrückt. Der Flussdichtetensor lässt sich insgesamt darstellen durch

$$\underline{\underline{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{\tilde{v}}} \\ \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{\tilde{v}}}^T + \underline{\underline{p}} \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{\tilde{H}}} \\ \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{\tilde{k}}} \\ \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}^k} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\underline{\tilde{T}}} - \underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}} \\ \underline{\underline{\tilde{T}}} \underline{\underline{\tilde{v}}} - \underline{\underline{\tilde{q}}} \\ (\mu_m + \sigma^* \mu_f) \nabla \underline{\underline{\tilde{k}}} \\ (\mu_m + \sigma \mu_f) \nabla \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}^v}. \quad (4.30)$$

Die Beziehung für den viskosen Spannungstensor  $\underline{\underline{\tilde{T}}}$  bzw. den Reynoldsspannungstensor  $\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{\text{turb}}$  folgt dem Zusammenhang aus (3.26) bzw. (4.26). Der Dehnratentensor verbleibt gegeben durch (3.28). Der Wärmeleitungskoeffizient  $K$  ergeht geändert durch die Summation aus molekular und fluktuierend begründetem Anteil nun zu

$$K = K_m + K_f = \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1} \left( \frac{\mu_m}{\text{Pr}_m} + \frac{\mu_f}{\text{Pr}_f} \right) \quad (4.31)$$

mit  $\text{Pr}_f = \text{Pr}_t$ . Die Fluktuationsviskosität  $\mu_f$  berechnet sich aus (4.27). Für alle weiteren Größen der Bilanzgleichung verweise ich auf die Zustandsgleichungen aus Kap. 2.2, die nun gemittelt zu verwenden sind, sowie Kap. 3.2.3 für ergänzende Erläuterungen zu den Grundgleichungen der mittleren Strömungsbewegung.

## 4.2 Definitionen der signifikanten Störungsmoden

Die Größen  $\tilde{\tau}_{k,\text{nt}}$  und  $\tilde{\tau}_{\mu,\text{nt}}$  sind charakteristische Zeitskalen vom Typ der speziellen betrachteten Instabilität. Für moderate Mach-Zahlen  $\text{Ma} \lesssim 4$  ist die dominante Instabilitätsmode die erste Lösungsmoden der Störungsdifferentialgleichung [9,21]. Diese Störungen sind Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung. Diese zweidimensionale Störung wird als Tollmien-Schlichting-Welle (TS-Welle) bezeichnet. In diesem Fall wird  $\tilde{\tau}$  als

$$\tilde{\tau}_1 = \frac{a}{\omega_{\text{ts}}} \quad (4.32)$$

gewählt [18], mit  $a$  als Modellkonstanten. Diese wird als Funktion des Turbulenzgrades der freien Anströmung

$$\text{Tu}_\infty = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\tilde{k}_\infty}{\tilde{U}_\infty^2}}, \quad (4.33)$$

mit  $\tilde{k}_\infty$  und  $\tilde{U}_\infty$  als kinetischer Turbulenzenergie und Betrag des Geschwindigkeitsvektors der freien Anströmung gebildet [18]:

$$a = 0.095 (100 \text{Tu}_\infty - 0.138)^2 + 0.01122. \quad (4.34)$$

Die Größe  $\omega_{\text{ts}}$  ist die Kreisfrequenz der ersten Störungsmoden mit der maximalen Verstärkungsrate und wird durch die Korrelation

$$\frac{\mu_{m,e} \omega_{\text{ts}}}{\bar{\rho}_e \tilde{U}_e^2} = 3.2 \text{Re}_{\delta_i}^{-1.5} \quad (4.35)$$

als Funktion der Verdrängungsdicke  $\delta_1$  gegeben [18]. Da in einem Navier-Stokes-Verfahren Grenzschichtgrößen wie die Verdrängungsdicke nicht unmittelbar vorliegen, wird auf eine alternative Korrelation zurückgegriffen. Diese stellt eine Funktion des Staupunktabstandes entlang der Strömungskontur durch

$$\frac{\mu_{m,e} \omega_{ts}}{\bar{\rho}_e \tilde{U}_e^2} = 0.48 \text{Re}_s^{-0.65} \quad (4.36)$$

dar [18]. Aus letzterem Zusammenhang lässt sich bei bekannter Phasengeschwindigkeit  $C_{r,ts}$ , die zu meist mit  $C_{r,ts} = 2\delta$  und  $\delta$  als lokaler Grenzschichtdicke angegeben wird, die Wellenlänge der ersten Störungsmode durch

$$\Lambda_{ts} = 2\pi \frac{C_{r,ts}}{\omega_{ts}} \quad (4.37)$$

bestimmen [20]. Für den Fall der Plattenströmung, also einem sowohl verschwindenden Druck- als auch Geschwindigkeitsgradienten in Hauptströmungsrichtung, lässt sich aus einer expliziten Formulierung für (4.36) erkennen, dass die Werte der Kreisfrequenz der TS-Welle von sehr großen Werten in der Nähe des Staupunkts in Stromabrichtung immer weiter abfallen. Der funktionale Zusammenhang dafür lautet

$$\omega_{ts} = \frac{g}{s^n} \quad \text{mit} \quad g = f(\bar{\rho}_e; \mu_{m,e}; \tilde{U}_e) \quad \text{und} \quad n = 0.65. \quad (4.38)$$

Zusätzlich ist hier zu bemerken, dass die Funktion für die Modellkonstante  $a$ , wie sie durch (4.34) gegeben ist, in Zusammenhang mit der Beziehung aus (4.36) geeicht ist. In Verbindung mit der Beziehung aus (4.35) ergibt sich eine geänderte Funktion für  $a$  als

$$a = 0.069(100 \text{Tu}_\infty - 0.138)^2 + 0.00819. \quad (4.39)$$

Zu diesem Schluß gelangt man durch Vergleich von [1,5,18,20,21]. In den Gleichungen zuvor kennzeichnet der Subskript  $_e$  stets die Größen am entsprechenden Grenzschichtrand. Die Reynolds-Zahlen in dieser Gleichung sind zudem mit Größen am Grenzschichtrand gebildet. Die Korrelationen aus (4.35) und (4.36) sind zunächst inkompressibel konzipiert [21]. Um dennoch Kompressibilitätseffekte im Rahmen dieser Gleichungen zu berücksichtigen wird die molekulare, dynamische Viskosität  $\mu_{m,e}$  bei einer kompressibilitätskorrigierten Referenztemperatur  $T^*$  über das Sutherland-Gesetz ermittelt. Die Referenztemperatur wird definiert durch

$$\frac{T^*}{T_e} = 1 + 0.032 \text{Ma}_e^2 + 0.56 \left( \frac{T_W}{T_e} - 1 \right). \quad (4.40)$$

$T_W$  stellt die Temperatur des Fluids direkt an der umströmten Oberfläche dar [21].

Für Mach-Zahlen  $\text{Ma} \gtrsim 4$  dominiert die zweite Störungsmode den Transitionsprozess [9,21]. Dieser Fall kommt zwar in dieser Arbeit nicht zur Anwendung, soll aber dennoch an dieser Stelle dokumentiert werden. Die zweite Mode ist akustischer Herkunft, denn sie zeichnet sich durch starke Druck- und Temperaturschwankungen aus. Für diese Mode wird eine charakteristische Zeit als

$$\tilde{\tau}_2 = \frac{b}{\omega_{zm}} \quad (4.41)$$

mit

$$\omega_{zm} = \frac{C_{r,zm}}{\Lambda}, \quad (4.42)$$

wobei  $C_{r,zm}$  die lokale Phasengeschwindigkeit,  $\Lambda$  die Wellenlänge und  $b$  eine Modellkonstante bilden [20]. Die Phasengeschwindigkeit wird in diesem speziellen Fall als  $C_{r,zm} = 0.94 U_e$  mit  $U_e$  als

Geschwindigkeit am Grenzschichttrand angesetzt [20]. Die Wellenlänge  $\Lambda$  wird ungefähr durch  $2\delta$  angenähert, wie in einem vorhergehenden Absatz schon erwähnt wurde [20]. Als Wert für die Modellkonstante  $b$  wird 0.06 angegeben [20].

Die gesamte nicht-turbulente, viskose Zeitskala  $\tilde{\tau}_{\mu,nt}$  setzt sich nun aus beiden Moden zu gleichen Teilen zusammen (vgl. [20]) als

$$\tilde{\tau}_{\mu,nt} = \tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2. \quad (4.43)$$

Im nicht-turbulenten Bereich wird eine repräsentative Zeit für dissipative Entwicklungen der kinetischen Schwankungsenergie modelliert (vgl. [18]) durch

$$\frac{1}{\tilde{\tau}_{k,nt}} = (a+b) \frac{\mu_f \tilde{S}}{\mu_m}. \quad (4.44)$$

$\tilde{S}$  kennzeichnet die zweite Invariante des Dehnratentensors  $\tilde{S} = \sqrt{\tilde{\underline{\underline{S}}} : \tilde{\underline{\underline{S}}}}$ . In der vorliegenden Arbeit blieb wegen  $Ma < 4$  die zweite Störungsmode bei der Implementierung unberücksichtigt. Mit den vorhergehend abgeleiteten Beziehungen für die gesuchten Größen  $\tilde{\tau}_{\mu,nt}$ , sowie  $\tilde{\tau}_{k,nt}$ , und unter Vernachlässigung der zweiten Mode ergeben sich die Gleichungen (4.22-4.23) ausformuliert zu

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_\mu} = (1 - \gamma_N) \underbrace{\frac{\beta^* a}{\omega_{ts}}}_{1/\tilde{\omega}_{\mu,nt}} + \gamma_N \underbrace{\frac{1}{\tilde{\omega}}}_{1/\tilde{\omega}_{\mu,t}} \quad (4.45)$$

und

$$\tilde{\omega}_k = (1 - \gamma_N) \underbrace{\frac{a}{\beta^*} \frac{\mu_f}{\mu_m} \tilde{S}}_{\tilde{\omega}_{k,nt}} + \gamma_N \underbrace{\tilde{\omega}}_{\tilde{\omega}_{k,t}}. \quad (4.46)$$

Zusammen mit der Beziehung für die Fluktuationsviskosität aus (4.27) ergibt (4.45) zu

$$\mu_f = \frac{\tilde{\rho k}}{\tilde{\omega}_\mu} = (1 - \gamma_N) \underbrace{\frac{\beta^* a \tilde{\rho k}}{\omega_{ts}}}_{\mu_{nt}} + \gamma_N \underbrace{\frac{\tilde{\rho k}}{\omega_{ts}} \tilde{\omega}}_{\mu_t}. \quad (4.47)$$

Damit ist das Gleichungssystem geschlossen.

Aus [18] geht nicht eindeutig hervor, ob in (4.44) die gesamte Fluktuationsviskosität  $\mu_f$  oder lediglich der nicht-turbulente Anteil  $\mu_{nt}$  der Fluktuationsviskosität eingeht. Für die Größe  $\tilde{\omega}_k$  ergibt sich ausformuliert im Falle einer in (4.44) eingehenden gesamten Fluktuationsviskosität  $\mu_f$

$$\tilde{\omega}_k = \tilde{\omega}_k^{(1)} = (1 - \gamma_N)^2 \frac{a}{\beta^*} \frac{\mu_{nt}}{\mu_m} \tilde{S} + (1 - \gamma_N) \gamma_N \frac{a}{\beta^*} \frac{\mu_t}{\mu_m} \tilde{S} + \gamma_N \tilde{\omega}. \quad (4.48)$$

Im Falle eines alleinig eingehenden nicht-turbulenten Anteils  $\mu_{nt}$  ergibt sich für  $\tilde{\omega}_k$  ausformuliert

$$\tilde{\omega}_k = \tilde{\omega}_k^{(2)} = (1 - \gamma_N)^2 \frac{a}{\beta^*} \frac{\mu_{nt}}{\mu_m} \tilde{S} + \gamma_N \tilde{\omega}. \quad (4.49)$$

Für den Bereich  $0 < \gamma_N < 1$  gilt  $\tilde{\omega}_k^{(1)} \neq \tilde{\omega}_k^{(2)}$ , während für  $\gamma_N = 0$  und  $\gamma_N = 1$   $\tilde{\omega}_k^{(1)} = \tilde{\omega}_k^{(2)}$  gilt. Implementiert ist Gl. (4.46), welche im ausformulierten Fall in Gl. (4.48) übergeht. Die Ergebnisse für die Transitionsvorhersage mit Punkttransition lassen darauf schließen, dass dieser vermeintliche Fehler der Implementierung nicht die Ursache der später noch darzustellenden Probleme ist. Denn wie zuvor dargestellt gilt im Falle von Punkttransition  $\tilde{\omega}_k^{(1)} = \tilde{\omega}_k^{(2)}$ .

### 4.3 Vorhersagekriterium des Transitionsbeginns

Zur Modellierung des transitionellen Strömungsbereichs wird die Intermittenzfunktion  $\gamma_N$  (s. Gl. (3.42)) zur Mischung nicht-turbulenter und turbulenter Strömungsgrößen in diesem Bereich verwendet. Diese Intermittenzfunktion beruht allerdings auf der Kenntnis eines Transitionsbeginns  $s_t$  und der charakteristischen Ausdehnungsgröße des Transitionsbereichs  $\lambda$ . Die Ausdehnungsgröße  $\lambda$  lässt sich durch die Beziehungen aus (3.49) zurückführen auf den unbekannten Transitionsbeginn  $s_t$ . Daher ist ein Kriterium zur Ermittlung dieses Transitionsbeginns anzuwenden.

Eine Vielzahl von Kriterien existieren zur Bestimmung des Transitionsbeginns, beispielsweise die Oberflächenpunkte für einen minimalen Reibungsbeiwert oder minimalen Wärmefluss. Den Aussagen in [21] folgend habe es sich aber gezeigt, dass während des iterativen Lösungsprozesses der Navier-Stokes-Gleichungen, Oberflächenderivativa starken Schwankungen unterliegen und als solches zur Transitionserkennung hinsichtlich einer Konvergenz der Gesamtsimulation ungeeignet seien. Daher wird in [18] auf ein alternatives Kriterium zurückgegriffen, welches auch empirisch durch Vergleiche mit Ergebnissen an der längsangeströmten Platte abgeleitet wurde. Hierbei zeigte sich, dass der Ort des minimalen Reibungsbeiwertes einherging mit dem Ort, an dem die Beziehung

$$\max \left( \frac{\mu_f}{\mu_m} \right) \approx \check{C}, \quad (4.50)$$

mit  $\check{C} = 0.09$ , galt. Das Maximum der Größe  $\mu_f/\mu_m$  bezieht sich auf die wandnormale Verteilung der Größe. Notiert man (4.50) in der nicht-turbulenten Strömungsregion ( $\gamma_N = 0$ ) in abgeänderter und zugleich ausformulierter Form, so ergibt sich das Transitionskriterium zu

$$C_{\text{krit}} = \frac{1}{\check{C}} \frac{\mu_f}{\mu_m} \bigg|_{\gamma_N=0} = \frac{1}{\check{C}} \frac{1}{\mu_m} \underbrace{\frac{\beta^* a \bar{p} \bar{k}}{\omega_{ts}}}_{\mu_f|_{\gamma_N=0}} \geq 1. \quad (4.51)$$

Aus [20] geht die genaue Anwendung des Kriteriums hervor. Danach ist der Transitionsbeginn bei Beobachtung der Größe  $C_{\text{krit}}$  entlang des jeweiligen Grenzschichtprofils als der Punkt auszumachen, an dem der Wert der Größe  $C_{\text{krit}}$  gerade den Wert eins übersteigt. Die Entfernung entlang der Oberfläche zwischen diesem Punkt und dem Staupunkt wird  $s_t$  zugeschrieben. Im inkompressiblen Strömungsfall ist das Kriterium also im Wesentlichen eine Funktion des Grenzschichtprofils der kinetischen Turbulenzenergie  $k$  und der Kreisfrequenz der TS-Instabilität  $\omega_{ts}$ .

### 4.4 Strömungsgrößen des Grenzschichtrandes

Da die Korrelation zur Bestimmung der Kreisfrequenz der ersten Störungsmode (4.36) abhängig ist von Strömungsgrößen am Grenzschichtrand, ist der Grenzschichtrand als Abstand zur Strömungskontur zu bestimmen. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Bestimmung der Grenzschichtdicke im nicht-turbulenten, inkl. transitionellen, körpernahen Strömungsbereich. Denn die Strömungsgrößen am Grenzschichtrand gehen nur in die Berechnung des nicht-turbulenten Anteils der Fluktuationsviskosität  $\mu_f$  ein.

Wie in [22] dargelegt wird, lässt sich die Bestimmung der Grenzschichtdicke auf die Bestimmung des lokalen Maximums der Diagnosefunktion  $F$

$$F = \eta^A \left[ \frac{dU(\eta)}{d\eta} \right]^B \quad (4.52)$$

zurückführen. Die Grenzschichtdicke resultiert dann aus

$$\delta = \varepsilon \eta_{\max} \quad (4.53)$$

mit  $\eta_{\max}$  als normalem Wandabstand, für den  $F = F_{\max}$  gilt.  $U$  stellt die oberflächentangentiale Geschwindigkeitskomponente dar. Für die laminare Strömungsform werden die Bestimmungsgleichungen (4.52) und (4.53) als

$$F_{\text{lam}} = \eta^{3.9} \left[ \frac{dU(\eta)}{d\eta} \right] \quad (4.54)$$

$$\delta_{\text{lam}} = 1.294 \eta_{\max} \quad (4.55)$$

beschrieben. Im turbulenten Strömungsfall ergibt sich

$$F_{\text{turb}} = \eta \left[ \frac{dU(\eta)}{d\eta} \right] \quad (4.56)$$

$$\delta_{\text{turb}} = 1.936 \eta_{\max} \quad (4.57)$$

In der transitionellen Strömungsregion wird die Grenzschichtdicke über die Beziehung

$$\delta = (1 - \gamma_N) \delta_{\text{lam}} + \gamma_N \delta_{\text{turb}} \quad (4.58)$$

ermittelt. Hierbei stellt  $\gamma_N$  wiederum die Intermittenzfunktion aus (3.42) dar.

## Approximative Lösung der kontinuumsmechanischen Bewegungsgleichungen Newtonscher Fluide

In der vorliegenden Arbeit wird zur numerischen Integration der Bewegungsgleichung für die mittlere Strömungsbewegung das Programmsystem *FLOWer* verwendet. Die Bewegungsgleichungen sind gegeben durch (3.33). Im Fall der kombinierten Transitions- und Turbulenzberechnung sind die Terme der Bewegungsgleichungen gemäß den Erläuterungen aus Kap. 4.1 und unter Berücksichtigung der Beschreibungen aus 4.2 aufzulösen.

Die Bewegungsgleichungen werden basierend auf einer Finite-Volumen-Methode räumlich diskretisiert. Dabei wird der Raumausschnitt, in dem die Strömung betrachtet wird, in eine endliche Menge überlappungsfreier Zellen unterteilt. Jede Zelle wird durch die Verbindung aller vier Eckpunkte formiert. Jeder so bestehende Netznk ist dabei durch die Kombination der Indizes  $(i, j, k)$  im Raum eindeutig identifizierbar. Diese Tatsache erlaubt die Bezeichnung des sich als Zusammenfassung aller Zellen ergebenden Rechnernetzes als strukturiert. Diese räumliche Diskretisierung führt zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der konservativen Variablen im Netznk  $(i, j, k)$  zwischen dem Zeitschritt  $n + 1$  und  $n$  bei einer lokalen Zeitschrittweite von  $\Delta t_{i,j,k}$

$$\frac{U_{i,j,k}^{n+1} - U_{i,j,k}^n}{\Delta t_{i,j,k}} = -\frac{F_{i,j,k}}{\mathcal{V}_{i,j,k}} + \underline{Q}_{i,j,k} \quad (5.1)$$

mit  $i = 1, 2, \dots, N_i$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_j$  und  $k = 1, 2, \dots, N_k$ . Des Weiteren kennzeichnet  $\mathcal{V}_{i,j,k}$  das Kontrollvolumen, welches den Netznk  $i, j, k$  umgibt,  $\underline{F}_{i,j,k} = \underline{F}_{i,j,k}^k - \underline{F}_{i,j,k}^v$  die Flussvektorapproximation für das entsprechende Kontrollvolumen, mit  $\underline{F}_{i,j,k}^k$  als konvektivem und  $\underline{F}_{i,j,k}^v$  als viskosem Anteil. Die Größe  $\underline{Q}_{i,j,k}$  stellt die Approximation des Quelltermvektors  $\underline{Q}$  dar. Die natürlichen Zahlen  $N_i$ ,  $N_j$  und  $N_k$  geben die jeweilige Punktzahl in der strukturierten Durchlaufrichtung  $i$ ,  $j$  und  $k$  an. Der Fluss wird durch ein zentrales Diskretisierungsschema bei zellecken-bezogener Formulierung approximiert.

### 5.1 Räumliche Diskretisierung

Bei der zellecken-bezogenen Formulierung erfolgt die Aktualisierung der Strömungsgröße des Netznk  $(i, j, k)$  als Funktion der diskreten Flussbilanz über das Kontrollvolumen der den Netznk umgebenden acht Netzzellen. Das Kontrollvolumen setzt sich als Summation der den Einzelvolumen der umgebenden Netzzellen zusammen, die an den Netznk  $(i, j, k)$  angrenzen. Im räumlichen Fall grenzen acht Zellen an diesen Netznk an, während sich diese Anzahl im ebenen Fall auf vier Zellen reduziert. Die angrenzenden Netzzellen bilden eine so genannte Super-Zelle. Der approximierte konvektive Anteil  $\underline{F}_{i,j,k}^k$  der Flussbilanz für den Netznk  $(i, j, k)$  kann ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} \underline{F}_{i,j,k}^k &= \underline{G}_{i,j,k} + \underline{G}_{i-1,j,k} + \underline{G}_{i,j-1,k} + \underline{G}_{i-1,j-1,k} \\ &\quad + \underline{G}_{i,j,k+1} + \underline{G}_{i-1,j,k+1} + \underline{G}_{i,j-1,k+1} + \underline{G}_{i-1,j-1,k+1} \end{aligned} \quad (5.2)$$

mit  $\underline{G}_{i,j,k}$  als Repräsentant des konvektiven Flusses über die Netzzelle, die in Abb. 5.1 beispielhaft dargestellt ist. Der Einzelfluss  $\underline{G}_{i,j,k}$  ist gegeben als Summation aller konvektiven Flüsse durch alle

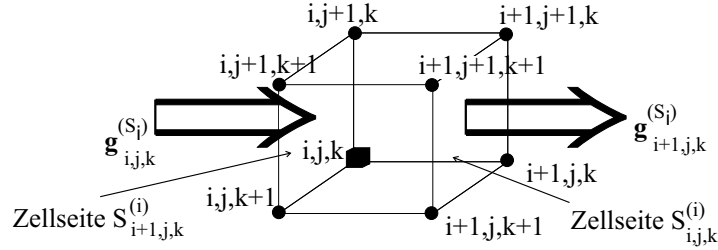


Abb. 5.1. Flussbilanz über eine Zellseitenflächenpaarung einer Zelle als Teil der Super-Zelle

sechs Zellseitenflächen der Teilnetzzelle aus Abb. 5.1 gemäß

$$\begin{aligned} \underline{G}_{i,j,k} &= \underline{g}_{i+1,j,k}^{(S_i)} - \underline{g}_{i,j,k}^{(S_i)} \\ &\quad + \underline{g}_{i,j+1,k}^{(S_j)} - \underline{g}_{i,j,k}^{(S_j)} \\ &\quad + \underline{g}_{i,j,k+1}^{(S_k)} - \underline{g}_{i,j,k}^{(S_k)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Hierbei ist beispielhaft der Zellflächenfluss  $\underline{g}_{i+1,j,k}^{(S_i)}$  durch die Zellseitenflächen mit der Fläche  $S_{i+1,j,k}^{(i)}$  als arithmetischer Mittelwert der Flussgrößen an den Netzknoten, die die spezielle Zellseitenfläche bilden, zu erhalten. Dies ist zu formulieren durch

$$\begin{aligned} \underline{g}_{i+1,j,k}^{(S_i)} &= \frac{1}{4} S_{i+1,j,k}^{(i)} \\ &\quad \left( \underline{F}_{i+1,j,k}^k + \underline{F}_{i+1,j+1,k}^k + \underline{F}_{i+1,j,k+1}^k + \underline{F}_{i+1,j+1,k+1}^k \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dabei stellt  $S_{i+1,j,k}^{(i)} = [S \underline{n}]_{i+1,j,k}^{(i)}$ , den mit dem Betrag der Zellseitenfläche  $S_{i+1,j,k}^{(i)}$  skalierten, normierten Oberflächennormalenvektor  $\underline{n}_{i+1,j,k}^{(i)}$  auf der Zellseitenfläche  $S_{i+1,j,k}^{(i)}$  dar.

Das räumliche Diskretisierungsschema ist wenigstens von erster Ordnung genau. Auf Rechnernetzen hoher Güte erreicht das Verfahren eine räumliche Genauigkeit von zweiter Ordnung. An dieser Stelle wird die Darlegung der Diskretisierung der viskosen Flüsse vernachlässigt. Dennoch ist zu bemerken, dass das Verfahren *FLOWer* einerseits eine *thin-layer*-Option und andererseits eine volle Navier-Stokes-Option bietet. Die *thin-layer*-Option vernachlässigt je nach Einstellung die viskosen Flüsse in bestimmten Flussrichtungen. Die das Transitionsmodell direkt betreffenden numerischen Untersuchungen wurden alle unter Nutzung der *thin-layer*-Option durchgeführt. Für detailliertere Darstellungen bezüglich der viskosen Flussapproximation wird auf den Anhang von [25] verwiesen. Die Ausführungen zu den räumlichen Diskretisierung sind [23] entnommen.

## 5.2 Künstliche Dissipation

Ein zentrales Diskretisierungsschema hat die Eigenschaft hochfrequente Oszillationen der Lösung während des iterativen Lösungsprozesses nur schlecht oder gänzlich nicht zu dämpfen. Dies führt zu

einem instabilen Lösungsschema. Daher werden dem Verfahren künstliche Flüsse mit dissipativen Eigenschaften beigelegt. Die gewöhnliche Differentialgleichung aus (5.1) geht dabei über in die Form

$$\frac{U_{i,j,k}^{n+1} - U_{i,j,k}^n}{\Delta t_{i,j,k}} = -\frac{F_{i,j,k} - D_{i,j,k}}{\mathcal{V}_{i,j,k}} + Q_{i,j,k}. \quad (5.5)$$

Der dissipative Operator  $D_{i,j,k}$  wird dabei definiert durch

$$\begin{aligned} D_{i,j,k} = & d_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(i)} - d_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(i)} \\ & + d_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(j)} - d_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(j)} \\ & + d_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(k)} - d_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dabei ist der künstliche dissipative Fluss beispielhaft gegeben durch

$$\begin{aligned} d_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(i)} = & \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(2),(i)} (\underline{U}_{i+1,j,k} - \underline{U}_{i,j,k}) \\ & - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(4),(i)} (\underline{U}_{i+2,j,k} - 3\underline{U}_{i+1,j,k} + 3\underline{U}_{i,j,k} - \underline{U}_{i-1,j,k}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Jener Fluss basiert im Wesentlichen auf einer Mischung zweiter und vierter Differenzen des Vektors der konservativen Variablen  $\underline{U}_{i,j,k}$ . Um diese Art der Differenzen zu erhalten, müssen einige Größen zur Bildung des dissipativen Operators  $D_{i,j,k}$  mit negativem Vorzeichen eingehen. Die Größen  $\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(2),(i)}$  und  $\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(4),(i)}$  stellen adaptive Koeffizienten zur Steuerung der künstlichen Dissipation am Netzknoten  $(i,j,k)$  dar. Adaptiv meint in diesem Zusammenhang, dass das künstliche Dissipationsverhalten durch den Lösungsprozess selbst gesteuert wird. Für den dissipativen Fluss  $d_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(i)}$  ist das Verhalten der dissipativen Steuerungskoeffizienten nachfolgend kurz erläutert. Die Koeffizienten  $\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(m),(\ell)}$  mit  $m = 2, 4$  und  $\ell = i, j, k$  werden zunächst gebildet durch

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(m),(\ell)} = \bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(\ell)} \varepsilon_{i,j,k}^{(m),(\ell)} = \frac{1}{2} \left( \alpha_{i,j,k}^{(\ell)} + \alpha_{i,j+1,k}^{(\ell)} \right) \varepsilon_{i,j,k}^{(m),(\ell)}. \quad (5.8)$$

Hierbei gelten die Definitionen

$$\varepsilon_{i,j,k}^{(2),(\ell)} = k_v^{(2)} \max \left( \Psi_{i+2,j,k}^{(\ell)}, \Psi_{i+1,j,k}^{(\ell)}, \Psi_{i,j,k}^{(\ell)}, \Psi_{i-1,j,k}^{(\ell)} \right), \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{i,j,k}^{(4),(\ell)} = \max \left( 0, k_v^{(4)} - \varepsilon_{i,j,k}^{(2),(\ell)} \right) \quad (5.10)$$

mit  $\Psi_{i,j,k}^{(i)}$  als Beispiel für die  $i$ -Richtung

$$\Psi_{i,j,k}^{(i)} = \frac{|p_{i+1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}|}{|p_{i+1,j,k} + 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}|}. \quad (5.11)$$

Die Faktoren  $k_v^{(2)}$  und  $k_v^{(4)}$  sind Skalierungsparameter, die durch die Vorgabe des Benutzers der Regulierung der künstlichen Dissipation dienen. Es gilt  $k_v^{(2)} > k_v^{(4)}$ . Der Drucksensor  $\Psi_{i,j,k}^{(\ell)}$  ist im Wesentlichen durch eine zweite Differenz der sensitivsten Strömungsgröße, des Drucks  $p$ , festgelegt. In



Strömungsbereichen mit starken Druckänderungen ist daher am Netzkpunkt  $(i,j,k)$  der stark dämpfende Dissipationsterm auf der Basis zweiter Differenzen aktiviert, während der zusätzliche Dissipationsterm auf der Basis vierter Differenzen deaktiviert ist. Ist der Drucksensor nicht aktiv, sind die Verhältnisse umgekehrt. In Bereichen glatter Strömungslösungen ist daher nur der schwach dämpfende Dissipationsterm basierend auf vierten Differenzen aktiv, um hochfrequente Störungen in der Lösung zu dämpfen. Für eine genaue Darstellung der Gewichtungskoeffizienten  $\alpha_{i,j,k}^{(\ell)}$  ist an dieser Stelle auf [23] verwiesen.

### 5.3 Zeitintegration

Die räumliche Diskretisierung resultiert in einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hinsichtlich der Zeit ist dieses System als von erster Ordnung zu bezeichnen. Dieses System kann abermals notiert werden als

$$\underbrace{\frac{U_{i,j,k}^{n+1} - U_{i,j,k}^n}{\Delta t_{i,j,k}}}_{\frac{d}{dt} U_{i,j,k}} + \underline{P}_{i,j,k} = \underline{Q}_{i,j,k} \quad (5.12)$$

mit

$$\underline{P}_{i,j,k} = \frac{1}{\gamma_{i,j,k}} (F_{i,j,k}^k - F_{i,j,k}^v - \underline{D}_{i,j,k}) + \underline{Q}_{i,j,k}. \quad (5.13)$$

Die Größe  $\underline{P}_{i,j,k}$  wird üblicherweise als Residuum bezeichnet.

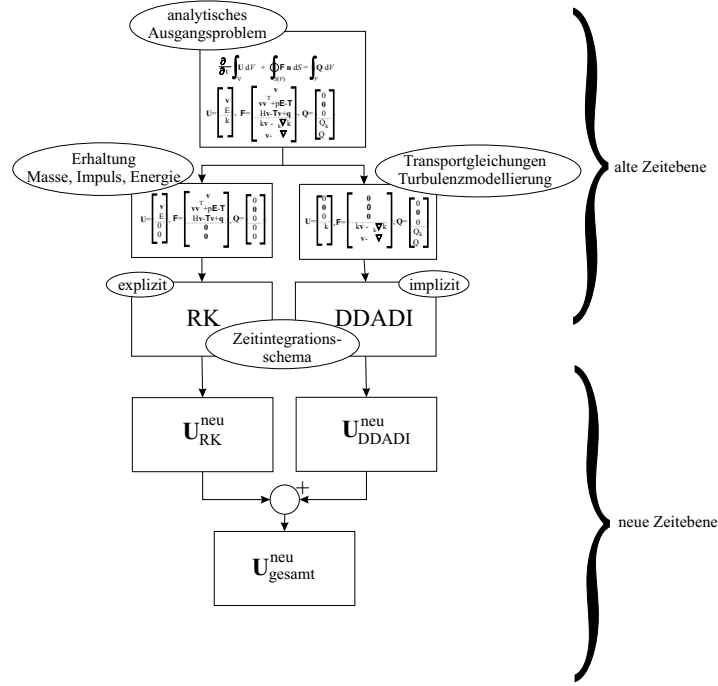
Grundsätzlich besteht die Möglichkeit einer expliziten oder impliziten Zeitintegration. Letztere Möglichkeit unterliegt, in Bezug auf die Wahl der Zeitschrittweite, in der Theorie keiner Stabilitätsbeschränkung. Diese Beschränkung gilt für ein explizites Zeitintegrationsschema. Ein Unterschied in der Formulierung besteht lediglich darin, ob

$$\underline{P}_{i,j,k} = \underline{P}(U_{i,j,k}^n) \quad (\text{explizit}) \quad (5.14)$$

oder

$$\underline{P}_{i,j,k} = \underline{P}(U_{i,j,k}^{n+1}) \quad (\text{implizit}) \quad (5.15)$$

gilt. In *FLOWer* wird ein explizites fünfstufiges Runge-Kutta-Verfahren zur zeitlichen Integration verwendet. In Zusammenhang mit der noch zu dokumentierenden Konvergenzbeschleunigungsmethode der Mehrgittertechnik kann dies aber für die diskretisierten Turbulenzgleichungen zu Konvergenzproblemen führen (vgl. [26]). Daher ist in der vorliegenden Arbeit das implementierte Verfahren zur impliziten Behandlung der Turbulenzmodellierung verwendet worden. Die Art der impliziten Integration folgt einem diagonal dominanten impliziten Schema in alternierender Richtung, welches in englischer Notation zur Abkürzung *DDADI* führt. Detaillierte Erläuterungen zu dieser Art der Integrationsbehandlung der Turbulenzgleichungen sind in [26] zu finden. Die Aufteilung des Zeitintegrationsproblems in einen explizit und einen implizit behandelten Anteil verdeutlicht qualitativ Abb. 5.2. Dabei werden die Werte der konservativen Variablen für Massen, Impuls- und Energiebilanz zum neuen Zeitschritt mittels des expliziten Runge-Kutta-Schemas bestimmt, während die Werte zum neuen Zeitschritt für die konservativen Variablen des Turbulenzmodells über das implizite *DDADI*-Schema ermittelt werden. Anschließend werden beide Anteile wieder zu einem Vektor der konservativen Variablen zusammengefügt.



**Abb. 5.2.** Aufteilung des Zeitintegrationsproblems in einen explizit und einen implizit behandelten Anteil

Die Ausgangsbasis des Zeitintegrationsschemas nach Runge-Kutta ist unter Verwendung lokaler Zeitschritte die folgende explizite Darstellung der Differentialgleichung:

$$\underline{U}_{i,j,k}^{n+1} = \underline{U}_{i,j,k}^n - \Delta t_{i,j,k} \underbrace{\frac{F_{i,j,k}^k - F_{i,j,k}^v - D_{i,j,k}}{\gamma_{i,j,k}}}_{P^*(\underline{U}_{i,j,k}^n)} \quad (5.16)$$

Die Integration für einen Zeitschritt  $\Delta t_{i,j,k}$  erfolgt in  $p$  expliziten Teilschritten. Daraus ergibt sich das Schema

$$\begin{aligned} \underline{U}_{i,j,k}^{(0)} &= \underline{U}_{i,j,k}^n \\ \underline{U}_{i,j,k}^{(s)} &= \underline{U}_{i,j,k}^{(0)} - \alpha_s \Delta t_{i,j,k} P^* \left( \underline{U}_{i,j,k}^{(s-1)} \right) \quad , s = 1, 2, \dots, p \\ \underline{U}_{i,j,k}^{n+1} &= \underline{U}_{i,j,k}^{(p)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

mit  $p = 5$  und den für einen maximalen stabilen Zeitschritt optimierten Stufenkoeffizienten  $\alpha_1 = 1/4$ ,  $\alpha_2 = 1/6$ ,  $\alpha_3 = 3/8$ ,  $\alpha_4 = 1/2$  und dem letzten Koeffizienten  $\alpha_5 = 1$ , um die Konsistenz in der Zeit zu wahren. Darüber hinaus existieren die Koeffizienten  $\beta_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, p$ , die während der schrittweisen Integration innerhalb eines Zeitschritts zur Gewichtung des viskosen und künstlich dissipativen Anteils des Residuums  $P_{i,j,k}^*$  verwendet werden. Nähere Informationen hierzu sind [23] entnehmbar. Das Schema ist unter Verwendung der genannten Stufenkoeffizienten von zweiter Ordnung genau in der Zeit.

Der lokale Zeitschritt  $\Delta t_{i,j,k}$  ist im Wesentlichen von der dimensionslosen Courant-Zahl oder CFL-Zahl  $C_{CFL}$  bestimmt, die aus der Courant-Friedrichs-Levy Bedingung her-

vorgeht [27, S. 6-1 ff.].  $C_{\text{CFL}}$  ist als das Verhältnis von physikalischer und numerischer Informationsgeschwindigkeit interpretierbar. Bei einer expliziten Zeitintegration ist die Courant-Zahl durch die genannte Bedingung auf den Wert eins beschränkt. Die Verwendung eines fünfstufigen Runge-Kutta-Verfahrens führt zu einer theoretisch erreichbaren Stabilitätsgrenze von  $C_{\text{CFL}} = 4$ .

## 5.4 Konvergenzbeschleunigung

In der vorliegenden Arbeit wurden zur Konvergenzbeschleunigung lokale Zeitschritte, implizite Residuenglättung und Mehrgittertechnik eingesetzt. Diese drei Verfahren sind unter anderem im Programmsystem *FLOWer* verfügbar und nachfolgend kurz beschrieben.

### 5.4.1 Lokale Zeitschritte

Die Verwendung lokaler Zeitschritte für stationäre Rechnungen erlaubt bei vorgegebener Courant-Zahl den maximal unter Stabilitäts Gesichtspunkten möglichen Zeitschritt für jeden Netzknoten. Bei zeitgenauen Rechnungen wird eine einzige Zeitschrittweite, und zwar die aus Stabilitätsgründen kleinste Weite im gesamten Integrationsbereich verwendet. Hingegen ändert sich die Zeitschrittweite bei Verwendung lokaler Zeitschritte von Netzknoten zu Netzknoten. Der Wert der Zeitschrittweite ergibt sich aus dem Verhältnis von lokalem Ortsschritt und maximalem Eigenwert, skaliert mit der Courant-Zahl. Da so an jedem Netzknoten die größtmögliche numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit ausgenutzt wird, erhält man eine Beschleunigung der Rechnung für stationäre Lösungen bei lokaler Ausnutzung der Stabilitätsschranke. Dies gilt für ein explizites Integrationsschema. Der Vorteil lokaler Zeitschritte ist besonders groß bei stark variierenden Ortsschrittweiten.

### 5.4.2 Implizite Residuenglättung

Dieses Verfahren erlaubt für stationäre Lösungen die Verwendung einer größeren Courant-Zahl, als sie durch die Stabilitätsbedingung bei einem expliziten Verfahren vorgeschrieben ist. Dem liegt die Idee zu Grunde, das verwendete Residuum des Runge-Kutta-Teilschritts (s) implizit zu ermitteln, so dass die numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit vergrößert wird und die örtliche Verteilung des Residuums geglättet wird. Als einfache Glättungsvorschrift wird die implizit formulierte Diffusionsgleichung nach Fourier für das geglättete Residuum  $\tilde{P}_{i,j,k}^{(s)}$  als Variable verwendet. Dies lässt sich als für alle Indexrichtungen zusammenfassend durch

$$(1 - \beta_i \delta_i^2) (1 - \beta_j \delta_j^2) (1 - \beta_k \delta_k^2) \tilde{P}_{i,j,k}^{(s)} = P_{i,j,k}^{(s)} \quad (5.18)$$

formulieren, mit  $\delta_i^2$ ,  $\delta_j^2$  und  $\delta_k^2$  als Operatoren zweiter Differenz in den jeweiligen Index-Richtungen. Die Koeffizienten  $\beta_i$ ,  $\beta_j$  und  $\beta_k$  dienen der Glättungssteuerung und sind in [23] dokumentiert.

### 5.4.3 Mehrgittertechnik

Dieses Verfahren verwendet eine Sequenz von Netzen, die in der Netzauflösung des Integrationsgebiets vergrößert sind. Diese Vergrößerung wird hier bezogen auf das Netz feinsten Auflösung verstanden als Auslassen jeder zweiten Netzlinie in allen Indexrichtungen. Die Netze gröberer Auflösung zeichnen sich also durch eine sukzessiv geringer werdende Netzknotenanzahl als das feinste auflösende Netz aus. Es sind zwei Verfahrensprozesse zu unterscheiden. Die Prozesse sind unter den Namen

*full-multigrid* und *simple-multigrid* bekannt. Wenn während des gesamten Lösungsprozesses nur ein Netz zur Berechnung Verwendung findet, so spricht man von *single grid*. Welche Parametereinstellungen die genannten Varianten der Mehrgittertechnik ergeben, wird in [23, S. 111-112] ausführlich dokumentiert.

Beim Lösungsprozesses mit *full-multigrid*-Technik wird in stufenweiser Annäherung vom gröbsten zum feinsten auflösenden Netz auf jeder Netzebene im Sinne der Auflösung eine eigene Lösung berechnet, die anschließend als Ausgangslösung für das nächste feiner auflösende Gitter verwendet wird. Hierbei wird zudem die Lösung der aktuellen Netzebene unter Anwendung von *simple-multigrid* errechnet. Die *simple-multigrid*-Technik verwendet für den iterativen Lösungsprozess auf der aktuellen Netzebene zusätzliche Netzebenen einer durch den Benutzer bestimmbaren Anzahl mit gröberer Netzauflösung als die aktuelle Netzebene. Der Veranschaulichung dient Abb. 5.3. Diese Abbildung stellt die zwei Netzebenen mit den jeweilig verschiedenen Auflösungen dar. Netz  $N_f$  ist dabei als feinstes

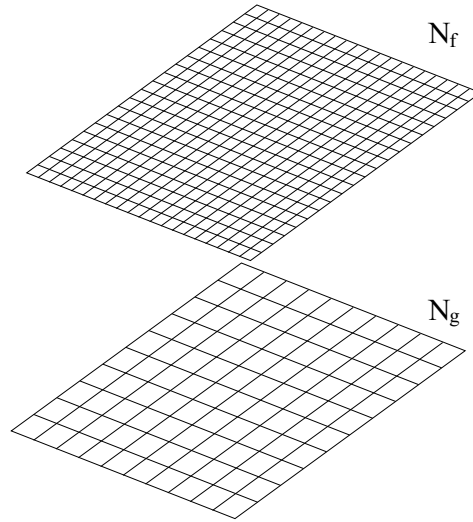


Abb. 5.3. Feine ( $N_f$ ) und grobe ( $N_g$ ) Netzebene

und Netz  $N_g$  als gröbstes Netz zu bezeichnen. Zwischen zwei Zeitschritten werden diese zwei Netzebenen im Lösungsprozess in einem vom Benutzer anzugebenden Zyklus verwendet. Das Netz  $N_f$  stellt in Abb. 5.3 die aktuell feinste Netzebene dar. Dieses Netz muss nicht notwendigerweise zugleich die im gesamten Verfahren verwendbare feinste Netzebene sein. Bei dieser Vorgehensweise wird die zum aktuellen Zeitpunkt bestehende Lösung der Netzebene  $N_f$ , die der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \underline{U}_f = \underline{P}_f \quad (5.19)$$

genügt, auf die nächst gröbere verwendete Netzebene (Subskript g) gemäß

$$\underline{U}_g = \underline{U}_f \quad (5.20)$$

übertragen. Unter Verwendung einer gewichteten Residuendifferenz

$$\underline{P}_g^* = \mathcal{J}_g^f \underline{P}_f \frac{\gamma_f}{\gamma_g} - \underline{P}_g \quad (5.21)$$

wird die Lösung auf der gröberen Netzebene durch Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dt}U_g = \underline{P}_g + \underline{P}_g^* = \mathcal{J}_g^f \underline{P}_f \frac{\mathcal{V}_f}{\mathcal{V}_g} \quad (5.22)$$

ermittelt. Die Größe  $\mathcal{J}_g^f$  stellt einen Operator zur Gewichtung des Residuums  $\underline{P}_f$  im Rahmen der Residuendifferenz zwischen feinem und grobem Netz dar (vgl. (5.21)).

## 5.5 Präkonditionierung

Im Rahmen dieser Arbeit sind Strömungsfälle im Niederschallbereich betrachtet worden. Diese Umströmungen sind als fast inkompressibel zu bezeichnen. Bei der Simulation solcher Strömungen mit Strömungslösern auf der Basis der kompressiblen Bilanzgleichungen nimmt bei sinkender Mach-Zahl die Lösungsgenauigkeit ab und das Konvergenzverhalten des Lösungsverfahrens verschlechtert sich. Dieses Verhalten liegt an der Konditionierung des zu lösenden Gleichungssystems für annähernd bis vollends inkompressible Strömungsfälle. Das zu lösende Gleichungssystem wird zum einen zunehmend steifer und zum anderen wächst das Ungleichgewicht in der dem Verfahren künstlich hinzugefügten Dissipation im Falle eines zentralen Diskretisierungsschemas. Diese Eigenschaft kann zur Divergenz des Lösungsprozesses führen. Ohne Beeinflussung der stationären Strömungslösung kann das Gleichungssystem durch Anwendung einer bestimmten Präkonditionierungsmatrix in seiner Steifigkeit reduziert werden und ein verbessertes Gleichgewicht der künstlichen Dissipation des Verfahrens hergestellt werden. Das Verfahren, welches in *FLOWer* implementiert ist, folgt den Arbeiten aus [28]. Die Präkonditionierungstechnik wurde für alle Untersuchungsfälle in dieser Arbeit verwendet.

## 5.6 Transitionsbehandlung

Dieser Abschnitt dient der Darstellung der Handhabung von laminaren und turbulenten Strömungszuständen innerhalb des Integrationsgebiets. Jeder Netzknoten besitzt im Falle von Punkttransition, also einer verschwindenden Transitionslänge, die Eigenschaft, entweder laminar oder turbulent zu sein. Diese Eigenschaft wird im Verfahren über die Funktion  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$  repräsentiert. Diese Funktion ist bestimmt durch

$$\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} = \begin{cases} 0, & (\text{laminarer Netzknoten } (i,j,k)) \\ 1, & (\text{turbulenter Netzknoten } (i,j,k)) \end{cases} \quad (5.23)$$

Die Bilanzgleichungen der Strömungsbewegung sind jedoch für das gesamte Integrationsgebiet weiterhin durch die Favre- und Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen gegeben. Die Eigenschaft, die einem Netzknoten durch die Funktion  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$  zugewiesen wird, hat an diesem Punkt lediglich eine physikalische Auswirkung auf die Quellterme der Turbulenzmodellgleichungen. Diese werden über die Funktion beeinflusst, so dass sich entweder ein laminarer oder turbulenter physikalischer Zustand im Verlauf des Iterationsprozesses für diesen Netzknoten einstellt. Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich auf die in *FLOWer* implementierte  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodellierung.

Die folgende numerisch motivierte Handhabung laminarer und turbulenter Netzknoten folgt der Annahme, dass sich an einem Netzknoten  $(i,j,k)$  eine laminare Strömungslösung einstellt, wenn für die Quelle kinetischer Turbulenzenergie an diesem Punkt

$$(Q_k)_{i,j,k} \stackrel{!}{\leq} 0 \quad (5.24)$$

gilt. Dies wird dadurch gewährleistet, dass die Produktion kinetischer Turbulenzenergie  $(P_k)_{i,j,k}$  an diesem Netzkpunkt begrenzt wird auf die Größe der Dissipation kinetischer Turbulenzenergie  $(P_k)_{i,j,k}$ . Für diesen Netzkpunkt wird also anstatt der eigentlich ermittelten Produktion kinetischer Turbulenzenergie eine limitierte Produktion  $(P_k^{\text{lim}})_{i,j,k}$  im Quellterm der Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie verwendet. Diese limitierte Produktion berechnet sich für den Netzkpunkt  $(i,j,k)$  zu

$$(P_k^{\text{lim}})_{i,j,k} = \min \left[ (P_k)_{i,j,k}, k_{k,P}^{l,t} \cdot DS_k \right]. \quad (5.25)$$

Der Produktionslimiter  $k_{k,P}^{l,t}$  ist nun letztendlich die durch die Funktion  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$  beeinflusste Größe. Der Limiter wird bestimmt durch

$$k_{k,P}^{l,t} = (k_{k,P,\text{lim}}) \mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}. \quad (5.26)$$

Mit  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} = 0$  gilt also für einen laminaren Netzkpunkt, unabhängig vom Wert der Größe  $k_{k,P,\text{lim}}$ ,  $k_{k,P}^{l,t} = 1$  und damit

$$0 \leq (P_k^{\text{lim}})_{i,j,k} \leq DS_k, \quad (5.27)$$

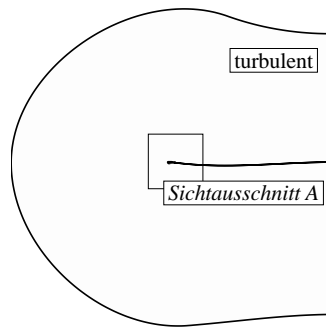
woraus die Bedingung aus (5.24) folgt. Die Größe  $k_{P,\text{lim}}$  ist ein vom Benutzer anzugebender Limitierungskoeffizient, der auch für turbulente Netzkpunkte die Produktion an kinetischer Turbulenzenergie auf ein diesem Faktor entsprechendes Vielfaches der Dissipation beschränkt. Diese turbulente Produktionslimitierung wird dazu verwendet eine Überproduktion kinetischer Turbulenzenergie in der Nähe des Staupunktes zu vermeiden. Die Standardeinstellung für diesen Faktor ist  $k_{k,P,\text{lim}} = 10$ .

Die Einteilung des Integrationsgebiets in Punkte laminarer und turbulenter Eigenschaft obliegt dem Benutzer. Das Integrationsgebiet ist gemäß einer bestimmten Transitionsvorgabemethodik in einen Bereich einer das Umströmungsobjekt umhüllenden Domäne laminarer Netzkpunkteigenschaften und einen ansonsten das ganze Integrationsgebiet umspannende turbulente Domäne einteilbar. Die laminare Domäne approximiert die Gestaltung einer laminaren Grenzschicht. Die Berandung der laminaren Domäne in oberflächennormaler Richtung folgt der Umströmungskontur. Der oberflächennormale Abstand dieser Berandung zur Umströmungskontur ist durch den Benutzer vorzugeben und sollte die physikalische Ausdehnung der laminaren Grenzschicht für den jeweiligen Strömungsfall übersteigen.

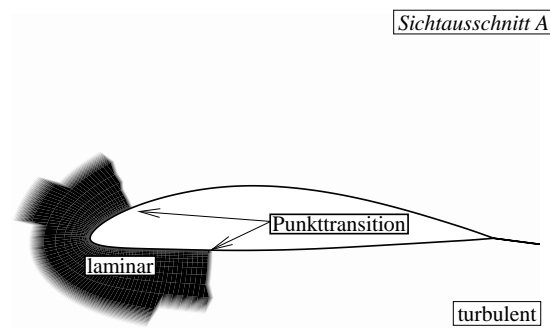
## 5.7 Anfangs- und Randbedingungen

Die Bilanzgleichungen der Strömungsbewegung stellen eine allgemeine Formulierung für die Bewegung der Strömung dar. Es existiert eine Lösungsschar der Bewegung. Eine spezielle Lösung ergeht aus den Anfangs- und Randbedingungen. Erst diese definieren das spezielle Strömungsproblem.

Dem iterativen Lösungsprozess der Bilanzgleichungen sind im Inneren des Integrationsgebiets Anfangswerte vorzugeben und auf der Berandung des Integrationsgebiets Randbedingungen zu setzen. Als Anfangswerte werden entweder die Werte der ungestörten Anströmung oder eine bereits errechnete Lösung verwendet. Letztere Variante wird als so genannter *restart* bezeichnet. Dies meint zugleich den Prozess an sich, also das Aufsetzen einer Rechnung auf einer bereits errechneten Lösung oder – im Sinne der Konvergenz – einer teilweise iterierten Lösung, und die Datei, die für jeden Netzkpunkt die Lösung der Rechnung enthält, die die *restart*-Datei erzeugte. Bei einem *restart* ist es durchaus zulässig, das verwendete Turbulenzmodell unter Angabe des in der *restart*-Datei eingesetzten Modells



**Abb. 5.4.** Äußere turbulente Domäne (Verteilung von  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$ )



**Abb. 5.5.** Laminare Domäne als Profilmhüllung (Verteilung von  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$ ), Sichtausschnitt aus Abb. 5.4

zu wechseln. Es besteht sogar die Möglichkeit eine turbulente Rechnung an eine laminare *restart*-Lösung anzuschließen. Die umgekehrte Variante ist im Verfahren *FLOWer* nicht möglich.

Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Randbedingungen werden im Bereich der Ergebnisdokumentation beschrieben.

## Implementierung der kombinierten Turbulenz- und Transitionsmodellierung

Aus den vorangegangenen Kapiteln ging hervor, dass die Transportgleichungen zur gleichzeitigen Transitions- und Turbulenzmodellierung lediglich in zwei Aspekten von den Transportgleichungen abweichen, die der reinen Turbulenzmodellierung dienen. Diese zwei Aspekte sind zum einen die Änderung in der turbulenten Wirbelviskosität und zum anderen die Änderung im Dissipationsterm der Transportgleichung der kinetischen Turbulenzenergie. Die Änderungen stellen sich genau dadurch dar, dass die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t$  für das Transitions-/Turbulenzmodell (TT-Modell) durch die Fluktuationsviskosität  $\mu_f$  mit nicht-turbulenten und turbulenten Viskositätsanteilen ersetzt wurde. Die Dissipationsrate im Dissipationsterm der Transportgleichung der kinetischen Turbulenzenergie  $\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}^{k,\omega} = \beta^*\bar{\rho}\tilde{k}\tilde{\omega}$  ist ersetzt worden durch eine Fluktuationsdissipationsrate  $\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}_k^{k,\omega} = \beta^*\bar{\rho}\tilde{k}\tilde{\omega}_k$  mit nicht-turbulenten und turbulenten Dissipationsratenanteilen.

Nachfolgend ist beschrieben, in welcher Weise die bestehende Infrastruktur der Implementierung des  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodells genutzt wurde, um das TT-Modell zu realisieren. Zunächst folgt jedoch die Darstellung der Infrastruktur der Turbulenzmodelle, speziell des  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodells, im Rahmen der Infrastruktur von *FLOWer*. An dieser Stelle ist vorab bemerkt, dass die Implementierung des TT-Modells in das Programmsystem *FLOWer* der Version 116.4 erfolgt ist.

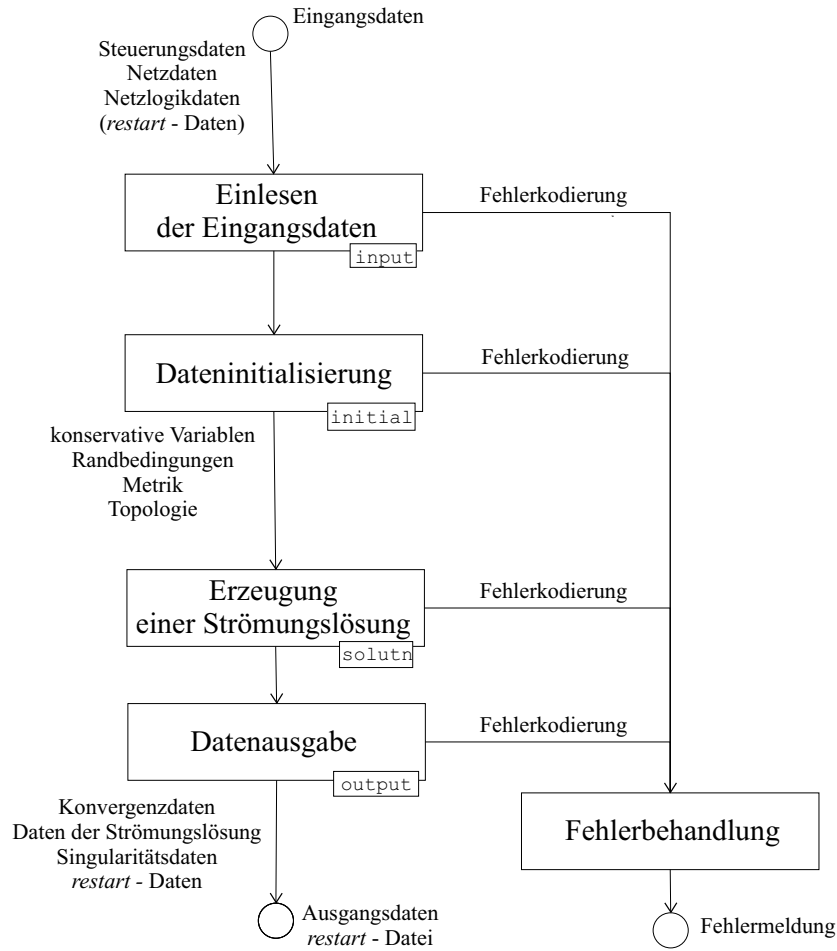
### 6.1 Infrastruktur der Turbulenzmodellierung in *FLOWer*

Dieser Abschnitt dient nicht der kompletten Darstellung der Infrastruktur der Turbulenzmodellierung, sondern vielmehr der Beschreibung der spezifischen Teile der Infrastruktur, die die zuvor genannten Anpassungen hinsichtlich der Realisierung des TT-Modells betreffen. Alle nachfolgenden Erläuterungen beziehen sich nur auf Programmteile, die an der sequentiellen Strömungsberechnung beteiligt sind.

Das Programmsystem *FLOWer* untergliedert sich im Wesentlichen in vier Programmteile, die durch die Routinen `input`, `initial`, `solutn` und `output` repräsentiert werden. Diese Routinen steuern den Einleseprozess der Steuerungsparameter, den Initialisierungsprozess, den eigentlichen Lösungsprozess und den Ausgabeprozess. Die Ablaufstruktur der Hauptroutine `flower`, folgt dem Flussdiagramm aus Abb. 6.1.

An dieser Stelle beschränkt sich die Darstellung auf den Bereich des Lösungsprozesses in `solutn`. Die Steuerung des Zeitintegrationsprozesses der Bewegungsgleichungen der Strömung wird von der Routine `solutn` gesteuert. Zur Beschleunigung der Konvergenz für den stationären Strömungsfall sind die Methoden der lokalen Zeitschritte, der impliziten Residuenglättung, sowie der Mehrgittertechnik implementiert. Jeder Mehrgitterzyklus wird durch die Routine `mgbeg` eingeleitet und durch die Routine

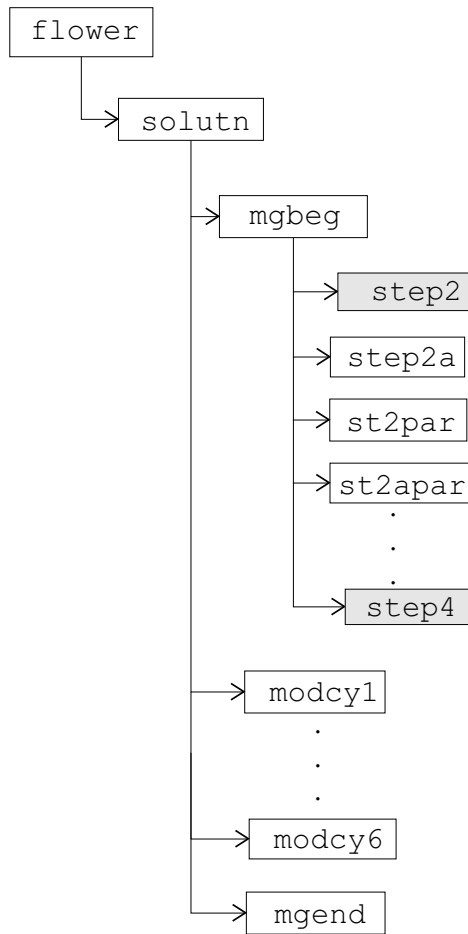


Abb. 6.1. Sequentieller Ablaufplan von *flower*

mgend innerhalb von *solutn* abgeschlossen. Der eigentliche Lösungsprozess wird entsprechend dem vom Benutzer gewählten Mehrgitterzyklus in den Routinen *modcy1* bis *modcy6* durchgeführt. Die Routinen des Mehrgitterprozesses sind mit einer Programmschleife über alle Netzebenen umrahmt. Die genauen Programmstrukturen sind im Anh. A dokumentiert.

Jede der Mehrgittersteuerungsroutinen *mgbeg*, *modcy1* bis *modcy6* und *mgend* beruht auf einer Abfolge von unterschiedlichen Mehrgitterschritten. Dem entsprechen die *step*-Routinen. Diese Routinen werden in Abhängigkeit von der gewählten Datenaustauschstrategie an Blockgrenzen aufgerufen. Im Falle einer parallelisierbaren Datenaustauschstrategie werden die entsprechenden Routinen mit der Namensendung *par* aufgerufen. Eine detaillierte Beschreibung aller Mehrgitterschritte ist [24] entnehmbar.

Da die sequentielle Berechnung jeglicher Flüsse, sowie die Berechnung der im Rahmen des Turbulenzmodells auftretenden Quellen, als auch die Berechnung der turbulenten Wirbelviskosität innerhalb des Mehrgitterschritts *step2* bzw. *step2a* stattfindet, wird der Fokus auf diesen Schritt gelegt. Das Flussdiagramm aus Abb. 6.2 zeigt den speziellen Ausschnitt der vierten Ausführungsebene des *flower*-Prozesses. Dieser Ausschnitt beinhaltet den Mehrgitterschritt *step2*. Die Abb. 6.2 stellt zusätzlich den Schritt *step4* dar, da dieser zum Zwecke der Berechnung einer gewichteten Residuendifferenz  $\underline{P}_g^*$  (vgl. Kap. 5.4.3) wiederum die Routinen zur Berechnung der Flüsse, sowie der



**Abb. 6.2.** Ausschnitt aus der vierten Ausführungsebene von *flower* mit dem Fokus auf den Mehrgitterschritt der Zeitintegration

Quellterme im Rahmen der Turbulenzmodellierung aufruft. Der Schritt *step2* kontrolliert die sequentielle Zeitintegration im Wesentlichen durch die beiden Routinen *solinit* und *rkstp*. Die Routine *solinit* ist dabei mit einer Programmschleife über die Anzahl aller Netzblöcke umrahmt. Die Routine *rkstp* ist mit einer inneren Schleife über die Anzahl der Runge-Kutta-Schritte und einer äußeren Schleife über die Anzahl der Netzblöcke umschlossen. Im Fall einer parallelen Berechnung sind die Aufgaben von *solinit* auf die Routinen *viscos* und *solipar* verteilt. Die Routine *solinit* wird zum Zwecke der Initialisierung vor dem ersten Runge-Kutta-Schritt aufgerufen. Die Durchführung eines Runge-Kutta-Integrationsschrittes findet in *rkstp* statt. Abb. 6.3 stellt die wichtigsten Aufrufe der Routinen *solinit* und *rkstp* auf den nachfolgenden Ausführungsebenen in einem Flussdiagramm zusammen. Zunächst sei der Fokus auf die Routine *solinit* gerichtet.

Die Routine *solinit* stellt im Wesentlichen die Infrastruktur zur Berechnung der turbulenten Wirbelviskosität und des Datenaustauschs der turbulenten Wirbelviskosität an Blockgrenzen bereit. Zusätzlich wird an dieser Stelle die Ableitung des Quelltermvektors nach den konservativen Variablen berechnet.

Die Steuerungsroutine zur Berechnung der turbulenten Wirbelviskosität ist *tufmuet*. Diese untergliedert sich in die Routinen mit dem Namensbeginn *turb*, die die eigentliche Berechnung der

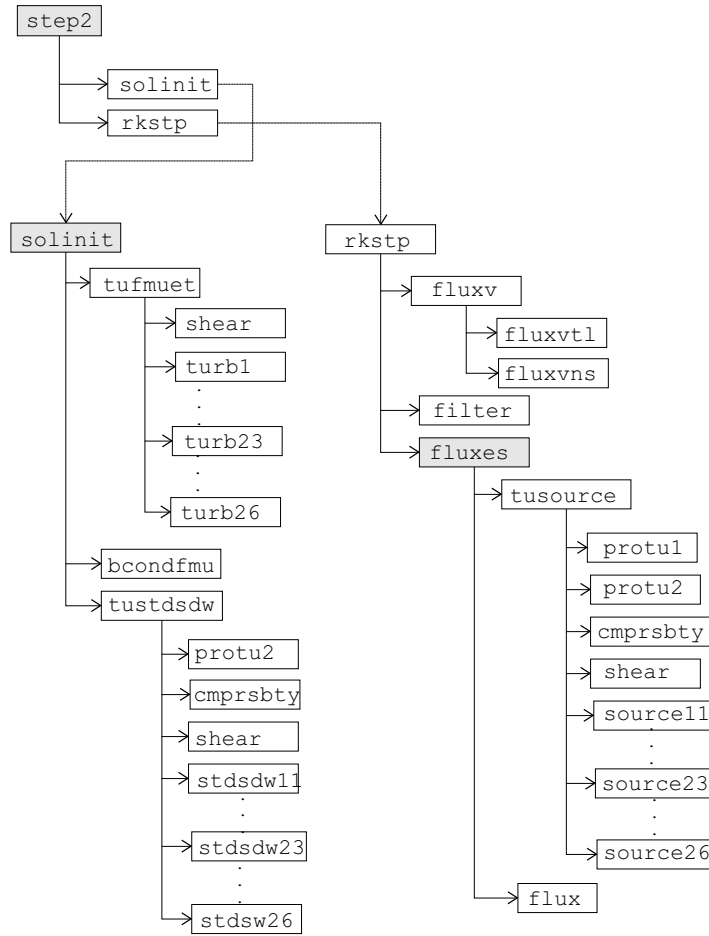


Abb. 6.3. Ausschnitt aus dem Ausführungsplan von step2

turbulenten Wirbelviskosität durchführen. Es existiert je eine Routine `turb` für jedes verfügbare Turbulenzmodell. Die Berechnung der turbulenten Wirbelviskosität im Rahmen des  $k\text{-}\omega$ -Turbulenzmodells nach Wilcox vollzieht sich in der Routine `turb23`. Denn jenes Turbulenzmodell ist durch den Wert 23 für den Eingabeparameter `ITURB` aktiviert.

Die Berechnung der dynamischen turbulenten Wirbelviskosität ist in dieser Routine umrahmt von jeweils einer Programmschleife über eine der drei Index-Richtungen  $i,j,k$ . Die Berechnung folgt dabei (3.32). Die Anzahl der Schleifendurchläufe entspricht der Anzahl physikalischer Netzknoten in der jeweiligen Index-Richtung zuzüglich einer Anzahl an Hilfspunkten. Das physikalische Netz stellt die Diskretisierung des problemangepassten Raumausschnitts dar. Der Raumausschnitt ist potentiell durch mehrere strukturierte Blöcke diskretisiert. Der Strömungslöser generiert sich zusätzliche Hilfszellen an Blockgrenzen, um einen Datenaustausch durchzuführen und um bei der Berechnung von Strömungsgradienten die räumliche Diskretisierungsgenauigkeit zu bewahren. Die errechneten Werte der turbulenten Wirbelviskosität werden in einem Feld entsprechend der aktuellen Blocknummer und Netzebenennummer im Schleifenzyklus gespeichert. Der Beginn des Feldes wird durch den Zeiger `ipfmuet(mbl, level)` festgelegt. Dabei stellen `mbl` und `level` die im `common-Block comcnt1` gespeicherten Werte der aktuellen Blocknummer und der Netzebenennummer in den jeweilig durchlaufenen Schleifen dar. Die Menge aller Zeiger `ipfmuet(mbl, level)` bildet ein Zeigerfeld, welches

im `common-Block compointer` gespeichert ist. Im Folgenden wird das Feld der turbulenten Wirbelviskositätswerte bezogen auf Block und Netzebene mit `fmuet` bezeichnet. Einen detaillierteren Einblick in die Speicherstrukturen von *FLOWer* vermittelt [24, S. 12 ff.]. An dieser Stelle wird die Speicherungsthematik nicht weiter vertieft.

Die Routine `bcondfmu` stellt die Infrastruktur für den Datenaustausch der turbulenten Wirbelviskosität an Blockgrenzen dar. Die Routine basiert auf dem Formalparameter `fmuet`. Die Routine `tustdsdw` errechnet in den untergeordneten Routinen in Abhängigkeit vom gewählten Turbulenzmodell die Differentiation des Quelltermvektors  $\underline{Q}$  nach dem Vektor der konservativen Variablen  $\underline{U}$ . Die Berechnung dieser Ableitung dient keiner physikalische Approximation, sondern ist bei der Bestimmung lokaler Zeitschritte von Bedeutung. Bei der Bildung der Ableitung wurden Differentiationen der turbulenten Wirbelviskosität nach  $U_6 = \tilde{\rho} \tilde{k}$  vernachlässigt. Die Argumentation, die dies rechtfertigt, tut dies nicht im Falle einer Fluktuationsviskosität.

Die Umsetzung eines einzelnen Runge-Kutta-Teilintegrationsschrittes erfolgt innerhalb der Routine `rkstp`. In jedem Runge-Kutta-Teilschritt wird das Residuum berechnet, welches im Wesentlichen aus der Summation aller Flüsse gebildet wird. Die Steuerungsroutine der viskosen Flussbilanzierung ist `fluxv`. Diese Routine untergliedert sich entsprechend den Optionen der viskosen Flussdiskretisierung in die Routinen `fluxvtl` und `fluxvns`. Diese beiden Routinen repräsentieren die Bilanzierung der viskosen Flüsse mittels *thin-layer*- und Navier-Stokes-Option. Diese genannten Routinen basieren auch auf dem Formalparameter `fmuet`. Das bedeutet, dass bei der Berechnung der viskosen Flüsse die dabei eingehenden Werte der turbulenten Wirbelviskosität direkt dem Feld `fmuet` entnommen werden und die Werte nicht erneut über die kinetische Turbulenzenergie und die turbulente Dissipationsrate bestimmt werden.

Die Routine `filter` berechnet im Falle eines zentralen Diskretisierungsschemas die künstlich hinzugefügten dissipativen Flüsse.

Das eigentliche Residuum wird im Rahmen der Routine `fluxes` berechnet. Die Gesamtflussbilanzierung an der Super-Zelle geschieht im Rahmen der Routine `flux`. Die Gesamtflussbilanzierung gestaltet sich als die Summation von konvektivem, viskosem und künstlich dissipativem Fluss. Der konvektive Fluss wird innerhalb von `flux` gebildet. In den konvektiven Fluss geht die turbulente Wirbelviskosität nicht mit ein.

Der Quellterm der Turbulenzgleichungen wird innerhalb der Routine `tusource` errechnet. Für die eigentliche Quelltermberechnung besteht wiederum entsprechend des aktivierten Turbulenzmodells jeweils eine eigene Routine. Für das  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodells nach Wilcox ist dies `source23`. Die Routinen `protu1` und `protu2` berechnen innerhalb von `tusource` zusätzliche Größen, die in die Berechnung des Produktionsanteils der Quelle eingehen. Während `protu1` dieses für Eingleichungsturbulenzmodelle durchführt, dient `protu2` der Berechnung der Zusatzterme für Zweigleichungsturbulenzmodelle. In `protu2` werden die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes und die zweite Invariante des Dehnratentensors als Einflussgrößen der Produktion kinetischer Turbulenzenergie bestimmt. Der Wert der Geschwindigkeitsdivergenz wird im Programm an der Stelle gespeichert, auf die der Zeiger `iprdivq` weist. Der Anteil an der Produktion kinetischer Turbulenzenergie, der auf die zweite Invariante des Dehnratentensors zurückgeht, ist im Programm an der Adresse abgespeichert, auf die der Zeiger `iprstra` weist. Die Werte der Größen selbst werden nachfolgend mit `rdivq` und `rstra` gekennzeichnet. Die Routine `cmprsbty` führt die Kompressibilitätskorrekturen der Koeffizienten  $\beta^*$  und  $\beta$  durch, wobei (3.41) eine implementierte Variante darstellt. Die verschiedenen Varianten der Kompressibilitätskorrekturen sind durch den Eingabeparameter `CMPCOR` steuerbar. Die angegebene Variante entspricht der Einstellung `CMPCOR=1`. Sowohl die unkorrigierten Werte der Koeffizienten als auch die kompressibilitätskorrigierten Werte werden an den Adressen gespeichert, auf die die Zeiger

`ipcmurc` und `ipcep2` weisen. Die errechneten Werte der Koeffizienten selbst werden im Folgenden mit `cmurc` und `cep2c` bezeichnet. Dabei gilt, dass `cmurc` die Größe  $\beta_C^*$  und `cep2c`  $\beta_C$  approximiert.

Die eigentliche Quellenberechnung, im Speziellen für das  $k$ - $\omega$  Turbulenzmodell nach Wilcox, erfolgt innerhalb der Routine `source23`. Obwohl die turbulente Wirbelviskosität in die Berechnung der Quellen eingeht, greift diese Routine nicht direkt auf die im Feld `fmut` abgespeicherten Werte für die errechnete turbulente Wirbelviskosität aus `turb23` zurück, sondern berechnet die Größe an den betreffenden Stellen erneut aus der kinetischen Turbulenzenergie und der turbulenten Dissipationsrate. Die implementierte Form der Quellenberechnung lautet

$$\begin{bmatrix} Q_k \\ Q_\omega \end{bmatrix} \Big|_{i,j,k} \leftarrow \begin{bmatrix} P_{k,m} |^{i,j,k} - DS_k |^{i,j,k} \\ P_\omega^{(1)} |^{i,j,k} - P_\omega^{(2)} |^{i,j,k} - DS_\omega |^{i,j,k} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

mit

$$P_{k,m} |^{i,j,k} \leftarrow \min \left[ P_k |^{i,j,k}, (k_{k,p}) \mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} DS_k |^{i,j,k} \right]. \quad (6.2)$$

Die in (6.1) und (6.2) auftretenden Größen zur Berechnung der Quelle der kinetischen Turbulenzenergie werden wie folgt berechnet:

$$P_k |^{i,j,k} \leftarrow P_k^{(1)} |^{i,j,k} - P_k^{(2)} |^{i,j,k} \quad (6.3)$$

$$DS_k |^{i,j,k} \leftarrow \beta_C^* \frac{(\bar{\rho} \tilde{k})_{i,j,k} (\bar{\rho} \tilde{\omega})_{i,j,k}}{\bar{\rho}_{i,j,k}} \quad (6.4)$$

mit

$$P_k^{(1)} |^{i,j,k} \leftarrow \underbrace{\bar{\rho}_{i,j,k} \frac{(\bar{\rho} \tilde{k})_{i,j,k}}{(\bar{\rho} \tilde{\omega})_{i,j,k}}}_{\mu_t |^{i,j,k}} \tilde{S}_{i,j,k}^* \quad (6.5)$$

$$P_k^{(2)} |^{i,j,k} \leftarrow \frac{2}{3} (\bar{\rho} \tilde{k})_{i,j,k} \text{Sp}(\underline{\tilde{S}}) |_{i,j,k}. \quad (6.6)$$

$$(6.7)$$

Die Terme aus (6.1) zur Berechnung der Quelle der turbulenten Dissipationsrate werden durch die Vorschriften

$$P_\omega^{(1)} |^{i,j,k} \leftarrow \alpha \frac{(\bar{\rho} \tilde{\omega})_{i,j,k}}{(\bar{\rho} \tilde{k})_{i,j,k}} \underbrace{\bar{\rho}_{i,j,k} \frac{(\bar{\rho} \tilde{k})_{i,j,k}}{(\bar{\rho} \tilde{\omega})_{i,j,k}}}_{\mu_t |^{i,j,k}} \tilde{S}_{i,j,k}^* = \alpha \bar{\rho}_{i,j,k} \tilde{S}_{i,j,k}^* \quad (6.8)$$

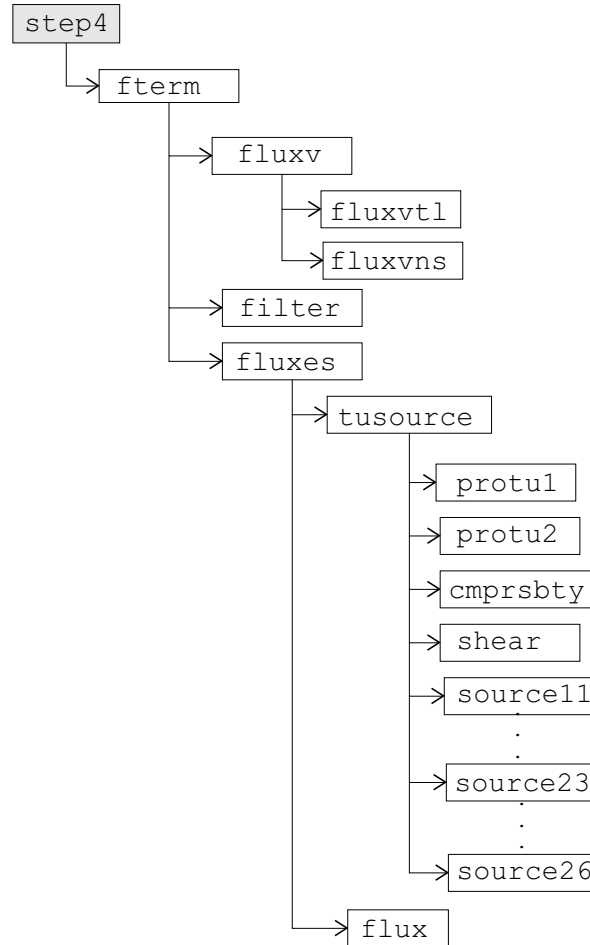
$$P_\omega^{(2)} |^{i,j,k} \leftarrow \frac{2}{3} \alpha \frac{(\bar{\rho} \tilde{\omega})_{i,j,k}}{(\bar{\rho} \tilde{k})_{i,j,k}} (\bar{\rho} \tilde{k})_{i,j,k} \text{Sp}(\underline{\tilde{S}}) |_{i,j,k} = \alpha \frac{2}{3} (\bar{\rho} \tilde{\omega})_{i,j,k} \text{Sp}(\underline{\tilde{S}}) |_{i,j,k} \quad (6.9)$$

und

$$DS_{\omega}|_{i,j,k} \leftarrow \beta_C \frac{(\bar{\rho} \tilde{\omega})_{i,j,k}^2}{\bar{\rho}_{i,j,k}} \quad (6.10)$$

ermittelt. Die Möglichkeit des Kürzens in (6.8) und (6.9) ist nur gegeben, wenn sich der Viskositätskoeffizient als Vorfaktor von  $\tilde{S}^*$  als turbulente Wirbelviskosität darstellt. Der zuvor verwendeten Notation ist hinzuzufügen, dass  $i,j,k$  als Subskripte den Zugriff auf den Wert  $i,j,k$  eines gespeicherten Feldes anzeigt, während  $i,j,k$  als Superskripte einen berechneten Wert im Rahmen der Schleifen über  $i,j,k$  meint. Dies soll lediglich den Unterschied gegenüber Konstanten hinsichtlich des Schleifendurchlaufs kennzeichnen.

Die Routine `step4` führt zur Berechnung der gewichteten Residuendifferenz im Rahmen der Mehrgittertechnik eine Flussberechnung durch. Die eigentliche Flussberechnung, wird entsprechend den Routinenaufrufen in `rkstp`, im Falle von `step4` in `fterm` durchgeführt. Abb. 6.4 zeigt, dass die Flussberechnung innerhalb von `fterm` durch die Routinenaufrufe `fluxv`, `filter` und `fluxes` innerhalb von `step4` realisiert ist.



**Abb. 6.4.** Ausschnitt aus dem Ausführungsplan von `step4`

Die vorangegangenen Erläuterungen demonstrieren, dass die bestehende Infrastruktur der Turbulenzberechnung durch wenige Erweiterungen für die Implementierung des TT-Modells verwendbar

ist. So beschränken sich die Erweiterungen zunächst auf die Routinen `solinit` und `fluxes`. Die Realisierung des TT-Modells in *FLOWer* lehnt sich stark an der Infrastruktur der Routinen `tufmuet` und `tusource` an.

Nachfolgend ist die Infrastruktur der TT-Modellierung beginnend mit der Liste der modellspezifischen Eingabeparameter dokumentiert.

## 6.2 Infrastruktur der Transitions-/Turbulenz-Modellimplementierung

Zur Durchführung der Zeitintegration werden das Feld der TS-Kreisfrequenzwerte  $\omega_{ts}|_{i,j,k}$  und das Feld der Strömungsstatusfunktionswerte  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{lt}$  benötigt. Der Berechnung dieser Felder dient ein Präparationsmodul der TT-Modellierung. Desweiteren werden zur Steuerung modellspezifische Eingabeparameter eingelesen. Das Präparationsmodul benötigt zur Berechnung der Felder zum einen die Strömungsgrößen der aktuell iterierten Strömungslösung und zum anderen gewisse Topologiedaten der Strömungsgeometrie. Abb. 6.5 zeigt die insgesamt durchgeführten Erweiterungen bzw. Änderungen des Programmsystems bei der Implementierung des TT-Modellierungsansatzes. Der Bereich der Routine `input` dient dem Einlesevorgang der modellspezifischen Parameter (`inpttm`) und der Überprüfung der Parameter auf Konsistenz mit anderen Eingabeparametern (`chinpttm`). Zusätzlich wird an dieser Stelle für das Feld `ttmvmem` statisch Speicher allokiert. Diese Speicherverwaltung wird in `defattm` durchgeführt. Die Bereitstellung einer besonderen Topologiedatenstruktur in Abhängigkeit von der Strömungsgeometrie geschieht innerhalb von `initial` in der Routine `ingeottm`. Die Änderungen innerhalb der Zeitintegration werden besonders in Kap. 6.2.3 dokumentiert. Das Präparationsmodul wird durch die Routine `prepttm` repräsentiert. Die eigentlichen Präparationsberechnungen für eine Kopplung des Transitionsmodells mit dem  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell nach Wilcox wird in der Routine `prptt123` durchgeführt. Nachfolgend sind die benannten infrastrukturellen Aufgaben in `input`, `initial` und `solutn` dokumentiert.

### 6.2.1 Modellsteuerung in `input`

Der Einleseprozess der Eingabeparameter aus der Datei `inp.dat` wird durch die Routine `readinp` gesteuert. Diese untergliedert sich in mehrere `inp`-Routinen. Je Modul wird der Einlesevorgang durch eine dieser Routinen für einen zum Modul gehörigen Parametersatz durchgeführt. Der Parametersatz des TT-Modells wird durch die Routine `inpttm` eingelesen. Die Tabelle 6.1 stellt die generellen Steuerungsparameter der TT-Modellierung zusammen. Jeder Parameter besitzt eine Grundeinstellung, die dem Parameter zugewiesen wird, wenn dieser nicht eingelesen wird. Da das implementierte Verfahren nur *simple-multigrid*-fähig ist, beziehen sich die Angaben in den nachfolgenden Tabellen zur Anzahl an Integrationsschritten immer auf die Anzahl an Integrationsschritten auf der feinsten Netzebene.

Der Parameter `ITRTUMD` ist der generelle Schalter zu Aktivierung eines bestimmten TT-Modellierungstyps und Deaktivierung des TT-Modells. In der Grundeinstellung ist das Modell deaktiviert. Bisher ist nur der TT-Modellierungstyp mit `ITRTUMD=1` implementiert. Dieser Typus kombiniert das beschriebene Transitionsmodell von Hassan und Warren mit dem auf Wilcox basierenden  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell.

Durch den Parameter `NTTMSTRT` besteht die Möglichkeit zunächst eine gewisse Konvergenz der Lösung unter Ausnutzung der *full-multigrid*-Technik zu erzeugen, um nach einer Anzahl von `NTTMSTRT` Iterationsschritten auf der feinsten Netzebene mit der TT-Modellierung zu beginnen. Andererseits kann eine rein laminare oder turbulente *restart*-Lösung als Grundlage der TT-Modellierung

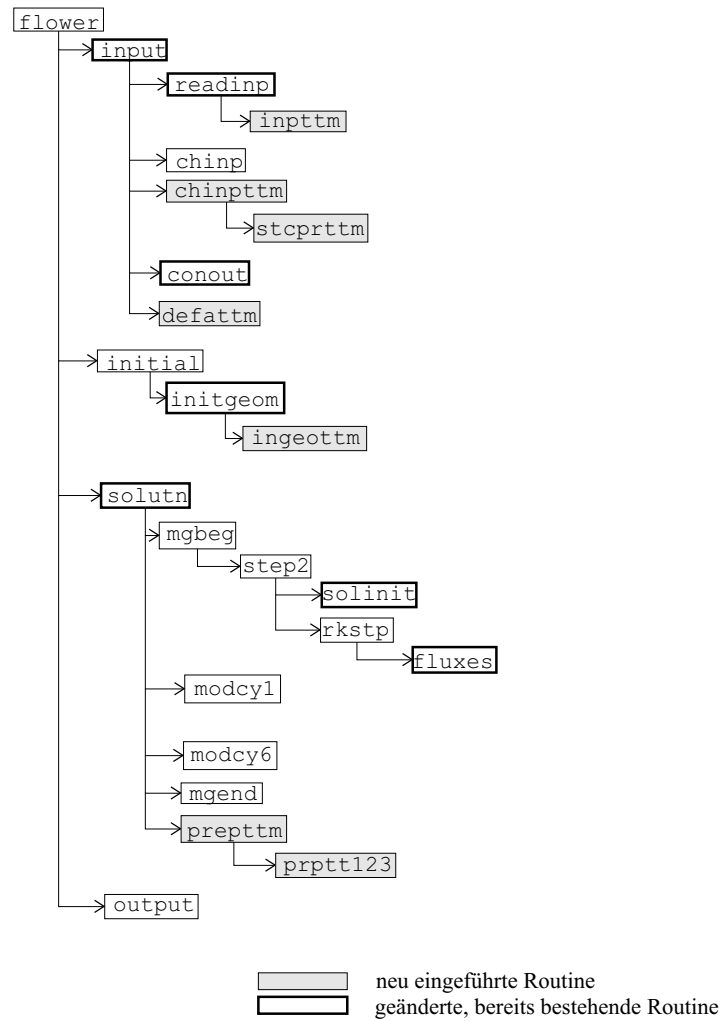


Abb. 6.5. Infrastruktur der Transitions-/Turbulenz-Modellimplementierung

verwendet werden und mittels des Parameters `NTTMSTRT` in eine transitionelle Lösung überführt werden, um anschließend eine TT-Modellierung zu betreiben. Das Transitionskriterium des minimalen Reibungsbeiwertes (`CRITTYPE=2`) bedarf einer transitionellen Lösung. Es ist zu beachten, dass das bei der Erzeugung der *restart*-Lösung spezifizierte Turbulenzmodell durch den Parameter `OLDTURB` bei Wechsel des Turbulenzmodells anzugeben ist.

Der Parameter `NTTMDLT` ist konzipiert worden mit dem Ansatz, nach Ermittlung einer Transitions-lage durch das Transitionskriterium bei konstanter Intermittenzverteilung im gesamten Integrations-gebiet zunächst eine gewisse Konvergenz der Lösung zu erzielen bis diese durch die Ermittlung einer neuen Transitions-lage wieder „gestört“ wird. Nur für die Integrationsschritte wird eine neue Transi-tionslage und damit auch eine neue Intermittenzverteilung auf der Basis der aktuellen Strömungslösung ermittelt, für die gilt, dass die Anzahl der Integrationsschritte auf der feinsten Netzebene ein natürli-ches Vielfaches der Integrationsschritte darstellt, die durch den Parameter `NTTMDLT` angegeben wurden.

Die Implementierung des TT-Modells ist konzipiert für mehrelementige Profile. Die Anzahl der Profilelemente, die mittels TT-Modellierung simuliert werden sollen, wird mittels des Parameters `NSMCPTT` angegeben. Diese Anzahl kann von der gesamten Zahl an simulierten Profilkomponen-



ten abweichen. Die Gesamtanzahl der Profilkomponenten wird durch den Parameter `NPARTS` in der speziellen Eingabedatei für Transitionsdaten `trans.dat` angegeben. Die Parameterangaben innerhalb dieser Datei, die für die TT-Modellierung von Belang sind, sind in der Tab. 6.2 zusammengefasst. Die Parameter innerhalb dieser Tabelle werden an nachfolgender Stelle genauer erläutert.

Der Parameter `RTMTU0` wurde zusätzlich zum schon bestehenden Parameter `TU0` eingeführt, der den Turbulenzgrad der freien Anströmung spezifiziert, um durch eine Änderung des Turbulenzgrades für die TT-Modellierung nicht gleichzeitig das Verhalten des Turbulenzmodells mit zu beeinflussen.

Bei aktiviertem TT-Modell mit der Einstellung `ITRTUMD=1` ist der Wert des Parameters `ITURB` automatisch auf 23 in der Implementierung festgelegt. Der Parameter `ITURB` spezifiziert das verwendete Turbulenzmodell. Ist die Einstellung `ITURB=0` getroffen worden, wird der Parameter `ITRTUMD` auf den Wert null zurückgesetzt, da eine TT-Modellierung bei rein laminarer Strömungssimulation unsinnig ist.

**Tab. 6.1.** Generelle Steuerungsparameter des TT-Modells in `inp.dat`

Parameter	Variable	Grundeinstellung	Wertebereich
ITRTUMD	itrtumd	0	0...1
	Schalter für den Typ der TT-Modellierung		
	0      TT-Modell deaktiviert 1      Transitionsmodell von Hassan und Warren in Kombination mit Turbulenzmodell von Wilcox		
NTTMSTRT	nttmstrt	150	0...NEND (ngit2)
	Anzahl der Integrationszyklen auf der feinsten Netzebene bis das Modul zur Transitionsvorhersage aufgerufen wird		
NTTMDLT	nttmdlt	50	0...NEND (ngit2)
			- NTTMSTRT
	Anzahl der Integrationszyklen auf der feinsten Netzebene zwischen zwei Aufrufen des Moduls zur Transitionsvorhersage		
NSMCMPTT	nsmcmptt	1	–
	Anzahl der Profilkomponenten, die an der TT-Modellierung beteiligt sind		
CMPTTM	cmpttm(1) ... cmpttm (nsmcmptt)	(1,...,1)	1...NSMCMPTT
	Reihe der Nummern der Profilkomponenten, die an der TT-Modellierung beteiligt sind z. B. CMPTTM <Komponente 1> <Komponente 2> etc.		
	Fortsetzung auf der nächsten Seite		

Fortsetzung der vorangegangenen Seite			
ITTMOUT	ittmtout	0	−1...1
	Schalter zur Steuerung zusätzlicher Ausgaben durch die TT-Modellierung -1 zusätzliche <i>debugging</i> -Ausgaben auf der Standardausgabe 0 keine zusätzlichen Ausgaben 1 Ausgabe des turbulenten Quellterms im Laufe der Iteration der Strömungslösung; die Ausgabe erfolgt alle $10 \cdot \text{NTTMDLT}$ Integrations-schritte beispielsweise in die Dateien <code>tuso_10001</code> , <code>tuso_10011</code> , ...		
RTTMTU0	rttmtu0	0.0005	–
	Turbulenzgrad der freien Anströmung für die Verwendung im TT-Modell in der Modellkonstanten $a$ , mit $a = 0.095 (100 \cdot \text{rttmtu0} - 0.138)^2 + 0.01122$		
CRITTYPE	crittype	1	1...2
	Typ des Transitionskriteriums 1 der Transitionspunkt wird durch die Stelle festgelegt, für die $1/\check{C} \cdot \mu_f/\mu_m _{\gamma_N=0} \geq 1$ gilt, mit $\check{C} = c_{mutur}$ 2 der Punkt des lokalen Minimums im Reibungswert $c_{f,\min}$ bestimmt die Transitionslage		
ITURB	iturb	–	1...29
	Typ des Transitionsmodells; für $\text{ITRTUMD}=1$ gilt automatisch $\text{ITURB}=23$ 0 laminare Strömung 23 Wilcox $k\text{-}\omega$ -Turbulenzmodell		
Fortsetzung auf der nächsten Seite			

Fortsetzung der vorangegangenen Seite			
OLDTURB	oldturb	-1 (=ITURB)	-1 ... 29
	Der OLDTURB-Parameter erlaubt den <i>restart</i> von einer Rechnung mit einem anderen Turbulenzmodell, OLDTURB korrespondiert mit Turbulenzmodell, welches zur Erzeugung der <i>restart</i> -Datei verwendet wurde		
TU0	tu0	0.005	—
	k- $\omega$ -Modellparameter zur Angabe des Turbulenzgrades der freien Anströmung, $\tilde{k}_\infty = 3/2 \cdot (tu0)^2 \cdot \tilde{v}_\infty \tilde{v}_\infty$ $\tilde{\omega}_\infty = \tilde{k}_\infty / (rltu \cdot \mu_{m,\infty})$		

Tab. 6.2. Zusätzliche Steuerungsparameter des TT-Modells in *inp.dat*

Parameter	Variable	Grundeinstellung	Wertebereich
NSFTTTM	nsftttm(1) ... nsftttm (nsmcmptt)	(5,...,5)	—
	Anzahl der Oberflächenpunkte, entlang der Profilober- und Profilunterseite, ausgehend vom Staupunkt, an denen das Transitionskriterium nicht ausgewertet wird		
Fortsetzung auf der nächsten Seite			

Fortsetzung der vorangegangenen Seite			
CHDISL	chdisl(1)	0	—
	...		
	chdisl(npaws)		
	Änderung des Parameters DISLIM auf den Wert der errechneten maximalen Grenzschichtdicke der Komponente zulassen		
	0	Änderung nicht zulassen	
	1	Änderung zulassen	
LIMBLT	limblt	0	—
	Parameter zur Limitierung der lokal berechneten Grenzschichtdicke auf den Wert der berechneten Grenzschichtdicke am Konturpunkt zuvor.		
	0	Limitierung deaktiv	
	1	Limitierung aktiv	
SSRCHMG	ssrchmg	ssrchmg(1)	(0.1,...,0.1)
	...		
	ssrchmg (nsmcmptt)		
	Krummlinige Ausdehnung des Bereichs entlang der Profilkontur, ausgehend vom Nasenpunkt/Staupunkt für Ober- und Unterseite, in dem nach einem Staupunkt gesucht wird		
NAVGTSLD	navgtsld	0	—
	Anzahl der Integrationsschritte nach Start des TT-Modells, nach denen eine Mittelung der errechneten Transitionslagen aktiviert wird		
	0	Mittelung deaktiv	
	>0	Mittelung nach NAVGTSLD ermittelten Transitionslagen aktiv	
Fortsetzung auf der nächsten Seite			

Fortsetzung der vorangegangenen Seite			
NAVGn	navgn	10	0...ntrws
	Anzahl der errechneten Transitionslagen, die bei der arithmetischen Mittelung herangezogen werden, so dass gilt: $s_t^n \leftarrow \sum_{p=0}^{navgn-1} s_t^{n-p}$		
DACTKPL	dactkpl	1	0...1
	Parameter zur Deaktivierung der Produktionslimitierung der kinetischen Turbulenzenergie über die Statusfunktion $\mathcal{F}^{l,t}$ 0 $P_{k,m} = \min[P_k, (k_{k,P})^{\mathcal{F}^{l,t}} \cdot DS_k]$ 1 $P_{k,m} = \min[P_k, k_{k,P} \cdot DS_k]$		
DACTOPL	dactopl	1	0...1
	Parameter zur Deaktivierung der Produktionslimitierung der turbulenten Dissipationsrate 0 $P_{\omega,m} = P_{\omega}$ (keine Limitierung) 1 $P_{\omega,m} = \min[P_{\omega}, k_{\omega,P} \cdot DS_{\omega}]$		
KPRDLIM	kprdlim	10.0	—
	Limitierungsfaktor der Produktion der kinetischen Turbulenzenergie, entspricht dem Faktor $k_{k,P}$		
OPRDLIM	oprdlim	10.0	—
	Limitierungsfaktor der Produktion der turbulenten Dissipationsrate, entspricht dem Faktor $k_{\omega,P}$		

Im Laufe der Anwendung des implementierten Verfahrens für einen Strömungsfall der längsangeströmten Platte wurden weitere Parameter zur Steuerung des TT-Modells in das Programmsystem integriert, um Unzulänglichkeiten im Iterationsprozess zu beseitigen. Diese Parameter sind in der Tab. 6.2 dokumentiert.

Eine frühere Programmfassung war ohne die Einteilung des Strömungsfeldes in komponentenbezogene laminare Domänen und eine turbulente Domäne implementiert, die das restliche Integrationsgebiet umfasste. Diese Fassung sollte basierend auf einer vollturbulenten *restart*-Lösung eine Transitionslage durch das Transitionskriterium mit CRITTYPE=1 detektieren. Diese Transitionslage würde sich bei einer vollturbulenten Lösung nahe des Staupunktes befinden. Im Sinne der iterativen Berechnung der TT-modellierten Strömungsbewegung sollte diese Transitionslage stromab wandern und eine endgültige Lage erreichen. Die vollturbulente *restart*-Lösung der ebenen Plattenströmung für eine Simulation mit dem  $k$ - $\omega$ -Modell beinhaltet aber stets wenige Netzpunkte hinter der Plattenvorderkante ein unphysikalisches Rezirkulationsgebiet. Das Transitionskriterium dieser Programmfassung der TT-Modellierung reagierte darauf immer in der Weise, genau an der Stelle des Rezirkulationsgebiets die Transitionslage zu detektieren, die sich im weiteren Iterationsprozess auch nicht mehr veränderte. Um dieses unphysikalische Verhalten zu umgehen, wurde der Parameter NSFTTTM integriert. Entsprechend dem Wert dieses Parameters werden Netzpunkte entlang der Profilober- und Profilverkehrseite, ausgehend vom Staupunkt, bei der Auswertung des Transitionskriteriums ausgelassen. Wie oft das Transitionskriterium innerhalb dieses Aussparungsgebiets erfüllt war, wird angezeigt. Das Lösungsverhalten hinsichtlich der früheren Programmfassung ist in Kap. 7 dokumentiert.

Im Laufe des Lösungsprozesses führte die bereits implementierte Variante der Staupunktdetektion zu falsch ermittelten Staupunktlagen. Die zuständige, bereits im Rahmen anderer implementierter

Transitionsvorhersagemethoden verwendete, Routine für die Staupunktberechnung (`stagnpnt`) wurde bis zur Aufdeckung dieses Verhaltens unverändert in die Infrastruktur der TT-Modellierung übernommen. Für die ebene Plattenströmung wurde so, bei nicht angestellter Platte gegenüber der Anströmung, der Staupunkt für einige Iterationsschritte auf der Mitte der Platte ermittelt. Denn die Staupunktberechnung stützt sich auf den entlang der Strömungskontur zu findenden maximalen Druckbeiwert. Da in die Berechnungsformeln der TS-Kreisfrequenzen im Rahmen der TT-Modellierung stets der krummlinige Abstand zum Staupunkt eingeht, werden diese Kreisfrequenzen für den Fall einer falsch ermittelten Staupunktlage ebenfalls falsch berechnet. Um den Prozess der Staupunktdetektierung auf den Bereich der zu erwartenden Staupunktlage zu beschränken wurde der Parameter `SSRCHMG` eingeführt. Dieser Parameter gibt für jede Profilkomponente den krummlinigen Abstand zum Nasenpunkt oder zum bereits detektierten Staupunkt entlang der Profilober- und Profilunterseite an. Lediglich in diesem Bereich wird nach einem Staupunkt mit dem Kriterium des maximalen Druckbeiwerts gesucht.

Um das Konvergenzverhalten der Strömungsberechnung bei TT-Modellierung zu verbessern, wurde die Mittelung der Transitionslagen implementiert. Um die Auswirkungen regelmäßiger Fluktuationen der ermittelten Transitionslagen um eine im Mittel auskonvergierte Transitionslage auf das gesamte Konvergenzverhalten der Lösung zu vermindern, wird die aktuelle Transitionslage durch den gemittelten Wert der bereits errechneten Transitionslagen im Rahmen des Iterationsprozesses bestimmt. Die arithmetische Mittelung bezieht die zum aktuellen Iterationsschritt gehörige Transitionslage in die Mittelwertbildung mit ein. Die Parameter `NAVGTSLD` und `NAVGN` bestimmen die Mittelwertbildung. Diese Parameter sind in Tab. 6.2 erläutert. Die Parameter zur Limitierung des Produktionsterms der Transportgleichungen für  $\tilde{k}$  und  $\tilde{\omega}$  sind ebenfalls in dieser Tabelle erklärt.

Die Tab. 6.3 enthält die wesentlichen Parameter bereits implementierten Transitionsbeschreibungs- und Transitionsvorhersagemethode, die für die Steuerung der TT-Modellierung ebenfalls von Belang sind. Der Parameter zur Steuerung der Transitionssetzungsmethode ist `TRANS`. Bei aktiviertem TT-Modell wird dieser Parameter automatisch mit dem Wert zwei belegt. Diese Einstellung stellt die Transitionssetzungsmethode unter Verwendung laminarer Domänen bereit.

**Tab. 6.3.** Steuerungsparameter der zuvor schon implementierten Transitionsmodellierung in `inp.dat`

Parameter	Variable	Grundeinstellung	Wertebereich
TRANS	<code>trans</code>	2	–
	Schalter zur Steuerung der zuvor schon implementierten Transitionsbehandlung, der Wert der Grundeinstellung ist hier in Bezug auf ein aktiviertes TT-Modell ( <code>ITRTUMD=1</code> ) gemeint 2 Transitionsbehandlung mit der Technik der laminaren Domänen		
ITRNPRED	<code>itrnpred</code>	0	–
	Parameter zur Steuerung bereits implementierter Transitionsvorhersagemethoden; bei aktiviertem TT-Modell gilt die angegebene Grundeinstellung für den Parameter; dadurch wird die Durchführung der Routine <code>trnprdm</code> deaktiviert		
NPARTPRD	<code>npartprd</code>	NSMCMPTT	–
	Um die Routine <code>uploside</code> auch im Rahmen der TT-Modellierung korrekt zu durchlaufen, wird der Parameter <code>NPARTPRD</code> bei aktivierter TT-Modellierung mit der angegebenen Grundeinstellung belegt		

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung der vorangegangenen Seite			
NPRED	npred(1) ... npred(npaws)	(cmpttm(1), ..., cmpttm(npaws))	1...NSMCMPTT
	Um die Routine uploside auch im Rahmen der TT-Modellierung korrekt zu durchlaufen, werden die Parameter NPRED bei aktivierter TT-Modellierung mit der angegebenen Grundeinstellung belegt		
ILEN	ilen(1) ... ilen(npaws)	(0,...,0)	—
	Um die Durchführung der Routine sttrnlcs im Rahmen der TT-Modellierung zu deaktivieren, wird dem Parameter ILEN die angegebene Grundeinstellung bei aktiviertem TT-Modell zugewiesen		
Fortsetzung auf der nächsten Seite			



Fortsetzung der vorangegangenen Seite			
PRDCONV	prdconv	1	–
	Parameter zur Aktivierung eines Konvergenzkriteriums für den Iterationsprozess der Transitionsvorhersage		
	0	Konvergenzkriterium deaktiv	
	1	Konvergenzkriterium aktiv, wenn zusätzlich NAVGTSL>0 gilt	
	Konvergenzkriterium: $ s_t^{n+1} - s_t^n  \leq 0.001$		

Die Parameter ITRNPRED, NPARTPRD, PRED und ILEN werden bei aktiviertem TT-Modell automatisch mit den in Tab. 6.3 angegebenen Grundeinstellungen belegt, um Programmteile der bereits implementierten Transitionssetzungs- und Transitionsvorhersagemethoden entweder im Rahmen der TT-Modellierung zu deaktivieren oder zu aktivieren.

**Tab. 6.4.** Steuerungsparameter der zuvor schon implementierten Transitionsbehandlung in `trans.dat`

Parameter	Variable	Grundeinstellung	Wertebereich
NPARTS	nparts	1	1 ... npaws
	Absolute Anzahl der Komponenten der Strömungskonfiguration		
Fortsetzung auf der nächsten Seite			

Fortsetzung der vorangegangenen Seite			
NTRAN	ntran(1) ... ntran(npaws)	(1,...,1)	1 ... nparts
	Eindeutige Nummern der Komponenten, die mit den Einstellungen in der jeweils 11. Spalte der Datei log.dat übereinstimmen müssen		
DISLIM	dislim(1) ... dislim(npaws)	—	≥ 0.0
	Parameter des wandnormalen Abstands, der in wandnormaler Richtung die Ausdehnung laminarer Domänen bestimmt; der Wert sollte die physikalische Grenzschichtdicke übersteigen		
TRMETH	trmeth(1) ... trmeth(npaws)	—	1 ... 2
	Parameter zur Steuerung der Vorgabemethode der Transitionspunktdatei 0      Angabe der Transitionslage über die Parameter XTRANU, XTRANL, YTRAN und ZTRAN; YTRAN gibt den Abstand zwischen der Profilsehne und der globalen y-Achse an 1      Angabe der Transitionslage über die Parameter XTRAN, YTRAN und ZTRAN; die Parameter geben die drei Raumkoordinaten des betreffenden Transitionspunktes wieder		
XTRANU	xtranu(1,1) ... xtranu(npaws, ntrws)	(0.0,...,0.0)	—
	x-Koordinate des Transitionspunktes auf der Profiloberseite		
XTRANL	xtranl(1,1) ... xtranl(npaws, ntrws)	(0.0,...,0.0)	—
	x-Koordinate des Transitionspunktes auf der Profilunterseite		
XTRAN	xtran(1,1) ... xtran(npaws, ntrws)	(0.0,...,0.0)	—
	x-Koordinate des Transitionspunktes auf der Profilunterseite bei TRMETH=2		
YTRAN	ytran(1,1) ... ytran(npaws, ntrws)	(0.0,...,0.0)	—
	In Abhängigkeit von der Methode der Transitionsvorgabe, y-Koordinate der Transitionssetzung (vgl. TRMETH)		
ZTRAN	ztran(1,1) ... ztran(npaws, ntrws)	(0.0,...,0.0)	—
Fortsetzung auf der nächsten Seite			

Fortsetzung der vorangegangenen Seite	
	In Abhängigkeit von der Methode der Transitionsvorgabe, z-Koordinate der Transitionssetzung (vgl. TRMETH)

Die bereits bestehende Implementierung an Transitionssetzungs- und Transitionsvorhersagemethoden beruht zusätzlich zu den Parameterangaben in der Datei `inp.dat` auf weiteren Angaben in der Datei `trans.dat`. Die TT-Modellierung nutzt ebenfalls Angaben in dieser Datei. Die Abb. 6.6 stellt beispielhaft die Struktur dieser Datei dar. In diesem Beispiel ist die Transitionssetzung für ein zweielementiges Profil dargestellt. Dies entspricht der Angabe durch den Parameter `NPARTS`, der die Gesamtanzahl der in eine Transitionsbehandlung miteinbezogenen Komponenten einer Strömungskonfiguration wiedergibt. Die weiteren Parameter in der Zeile mit der Angabe des Wertes für `NPARTS` sind für die TT-Modellierung nicht von Belang. An diese Zeile schließen sich, in der Anzahl entsprechend der Angabe von `NPARTS`, komponentenbezogene Parameterangaben an. Im Rahmen der TT-Modellierung besitzen die komponentenbezogenen Parameter `TRMETH`, `DISLIM`, `NTRAN`, sowie die Transitionsangaben durch die Parameter `XTRAN`, `YTRAN`, `ZTRAN` und `XTRANU`, `XTRANL` eine Bedeutung. Daher sind diese Parameter mit den Eingabemöglichkeiten in Tab. 6.4 dokumentiert.

Der Parameter `TRMETH` entscheidet mit seiner Einstellung über die Art der Transitionssetzungsangabe. Für die Einstellung `TRMETH=0` sind die Parameter `XTRANU`, `XTRANL`, `YTRAN` und `ZTRAN` zu Angabe der Transitionslage zu verwenden. `XTRANU` und `XTRANL` sind dann die x-Koordinate der Transitionslage auf der Profiloberseite und der Profilunterseite zuzuweisen. `YTRAN` gibt den Abstand zwischen der Profilhene und der y-Achse wieder. `ZTRAN` bestimmt die Lage der Profilebene. Wird hingegen `TRMETH=1` gewählt so sind die drei Raumkoordinaten des Transitionspunktes durch die Parameter `XTRAN`, `YTRAN` und `ZTRAN` anzugeben. Im zweidimensionalen Strömungsfall muss für eine Profilkonfiguration mit der Einstellung `TRMETH=0` je ein Transitionspunkt auf der Oberseite und einer auf der Unterseite angegeben werden. Der Parameter `NTRAN` hat dann die Einstellung eins. Bei `TRMETH=1` kann über den Parameter `NTRAN` die Anzahl der Transitionssetzungen bestimmt werden. Die Transitionsangaben zur Komponente 2 in Abb. 6.6 dokumentieren diese Möglichkeit beispielhaft.

### 6.2.2 Modellinitialisierung in `initial`

Die Routine `initgeom` innerhalb von `initial` ist um die Unteroutine `ingeottm` erweitert worden. Die Routine `initgeom` steuert die initiale Berechnung geometrieabhängiger Metrikdaten für alle Blöcke und alle Netzebenen. Dazu zählen die Berechnung von Zellnormalenvektoren, von Zellvolumen, von Oberflächennormalenvektoren, von Netzpunktentfernungen zum Strömungskörper und auch die Berechnung von Transitionspunkten. Letzteres meint keine Vorhersage von Transition, sondern die Übertragung von gesetzten Transitionspunkten in `trans.dat` auf das Rechnernetz. Aus den gesetzten Transitionslagen wird der laminar/turbulente Status jedes Netzpunktes ermittelt. Die initiale Berechnung des Feldes  $\mathcal{F}^{lt}$  wird also unter anderem durch `initgeom` gesteuert. Diese transitionelle Initialisierung wird im Rahmen der TT-Modellierung innerhalb der Routine `ingeottm` durchgeführt. Zusätzlich führt diese Routine eine Aufteilung des Strömungsprofils in Ober- und Unterseite durch. Diese Aufteilung spiegelt sich in einer darauf aufbauenden Datenstruktur wieder, auf die sich die Berechnungen im Präparationsmodul der TT-Modellierung stützen. Zunächst ist die Struktur der Routine `ingeottm` in Abb. 6.7 dargestellt. Nachfolgend sind die Wirkungen der UnterROUTINEN in `ingeottm` kurz erläutert.

```

$$=====
$$ Datei 'trans.dat'
$$=====
$$
$$ NPARTS  NCOR  NCORB  NOBLOC
$$
    2      0      0      !
$$-----
$$ Komponente 1:  main airfoil
$$
$$ TRMETH  WINBOD  DISLIM
$$
    0      0      0.02
$$
$$ NTRAN  NPOINT  ILEN
$$
    1      0      0
$$
$$ XTRAN  YTRAN  ZTRAN  XTRANU  XTRANL  XLENU  XLENL
$$
    0.0    0.0    0.0    0.075   0.075   0.0    0.0
$$-----
$$ Komponente 2:  flap
$$
$$ TRMETH  WINBOD  DISLIM
$$
    1      0      0.001
$$
$$ NTRAN  NPOINT  ILEN
$$
    2      0      0
$$
$$ XTRAN  YTRAN  ZTRAN  XTRANU  XTRANL  XLENU  XLENL
$$
    2.2    0.30   0.0    0.0      0.0    0.0    0.0
    2.4    0.18   0.0    0.0      0.0    0.0    0.0
$$-----

```

Abb. 6.6. Eingabebeispiel der Datei `trans.dat`

Die Routine `trnstni` initialisiert jeden Netzknoten des Netzes abhängig von der Einstellung des Parameters `ITURB` mit einem laminaren oder turbulenten Status. Dieser Status wird in Form des Wertes null, für den laminaren Fall, oder eins, für den turbulenten Fall, im Feld `ltflag` gespeichert.

Die Routine `stiltsts` bestimmt entlang der Konturen aller TT-modellierten Profilkomponenten den laminar-turbulenten Status entsprechend der Angabe der Transitionsunkte in `trans.dat` und überspeichert den initialisierten Wert für den betreffenden Netzknoten in `ltflag`.

In der Routine `disijkxc` werden komponentenbezogene Wandabstände berechnet. Diese werden in der Routine `trptimtf` dazu verwendet, um den nun entsprechend der Transitionssetzung bestehenden laminar/turbulenten Status für die Netzknoten entlang Profilkonturen auf die Netzknoten im gesamten Netz zu übertragen. Ist der in der Routine `disijkxc` berechnete Abstand eines Netzknotens zur nächsten Profilkomponente geringer als der Wert des Parameters `DISLIM` für die betreffende Profil-

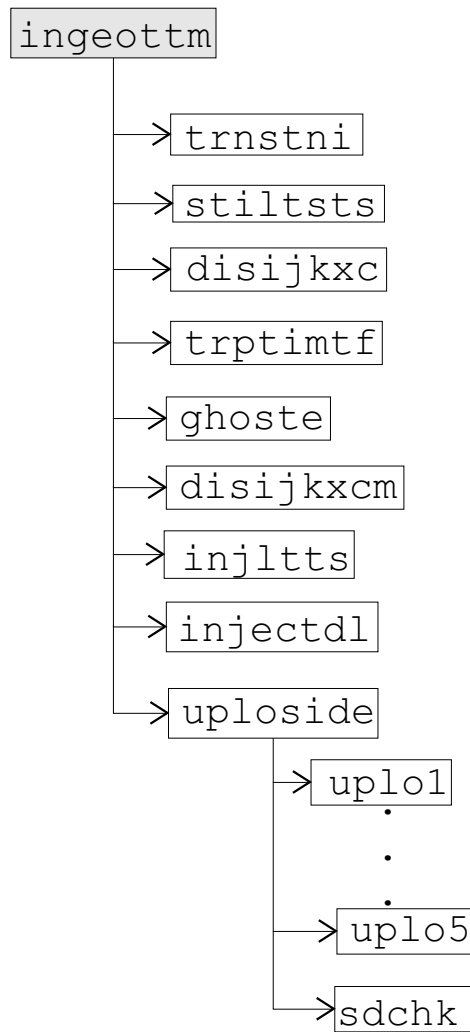


Abb. 6.7. Flussdiagramm der Routine `ingeottm`

komponente, so wird diesem Netzknoten der laminar/turbulente Status des nächsten Knotenpunktes zugewiesen.

Die Routine `ghoste` bestimmt die Werte der Hilfszellen des Netzbereiches mittels Extrapolation 0. Ordnung. Dabei ist zu beachten, dass die Verwendung der Routine `ghoste` zur Bestimmung der Werte in Hilfszellen keinen blockübergreifenden Datenaustausch ermöglicht.

Die Routine `disijkxcm` ermittelt aus den komponentenbezogenen Wandabständen globale generalisierte Wandabstände.

Bisher liegen alle errechneten Daten nur bezüglich der feinsten Netzebene vor. Die Routinen `injlts` und `injectdl` übertragen die Werte des laminar/turbulenten Statusfeldes und der globalen generalisierten Wandabstände auf die größeren Netzebenen.

Die Aufteilung des Profils in Ober- und Unterseite und damit die Bereitstellung der besonderen komponentenbezogenen Datenstruktur erfolgt in der Routine `uploside`. Die Aufteilung erfolgt in mehreren Schritten, denen die Routinen `uplo1` bis `uplo5` zugeordnet sind. Die Routine `sdchk` ermittelt abschließend, ob die zweidimensionale Strömungskonfiguration in Ober- und Unterseite aufge-

teilt werden konnte, also über zwei Konturseiten verfügt, oder nur einseitig ist. Letzteres trifft beispielsweise auf die einseitig längsangeströmte Platte zu. Die Routine `uplo1` bestimmt den oder die Hinterkantenpunkte des Profils. Die Handhabung im Fall zweier Hinterkantenpunkte, wie es bei mehrrelementigen Profilen auftritt, ist implementiert. Aus den zwei Hinterkantenpunkten wird durch arithmetische Mittelung der Raumkoordinaten beider Punkte ein virtueller Hinterkantenpunkt bestimmt. Dieser dient auch der Bestimmung der Sehnenlänge im Falle eines Profils mit zwei Hinterkantenpunkten. Hinterkantenpunkte werden als Punkte maximaler x-Koordinate bezogen auf die Komponente ermittelt. Innerhalb der Routine `uplo2` wird ein Nasenpunkt je Komponente als Punkt maximalen Abstandes zum virtuellen Hinterkantenpunkt gefunden. Im Falle einer geschlossenen Hinterkante fallen beide Hinterkantenpunkte, sowie der virtuelle Hinterkantenpunkt, zu einem Punkt derselben Koordinaten zusammen.

Die Aufteilung des Profils in Ober- und Unterseite geschieht über Zuweisung eines Statuswerts hinsichtlich seiner Position gegenüber der Lage einer Skelettlinie entlang der Kontur. Als zur Oberseite gehörig werden alle Punkte gezählt, die oberhalb oder direkt auf der Skelettlinie im Sinne der y-Koordinate liegen. Alle Punkte unterhalb der Skelettlinie im Sinne der y-Koordinate werden der Unterseite zugerechnet. Durch diese Aufteilungsmethodik gilt für eine ebene einseitige Strömungskonfiguration, dass alle Konturpunkte der Oberseite zugeordnet werden. In `uplo2` wird allen Konturpunkten zusätzliche ein initialer Statuswert für die Ober- und Unterseitenunterscheidung zugeordnet.

Die Routine `uplo3` bestimmt eine Skelettlinie des Profils. Dies geschieht durch Aufteilung der Profilschne in mehrere Betrachtungsintervalle. Der gemittelte y-Wert aller sich in einem Intervall befindlichen Konturnetzpunkte wird in der Mitte des Intervalls als y-Wert der Skelettlinie verwendet.

Durch die Kenntnis der Koordinaten der Skelettlinie kann nun entsprechend den zuvor gemachten Äußerungen die Einteilung des Profils in Ober- und Unterseite erfolgen. Dieses wird in der Routine `uplo4` durchgeführt. Für die Statusfunktion der Ober- und Unterseitenzugehörigkeit  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{o,u}$  eines Netzpunktes  $(i,j,k)$  ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\mathcal{F}_{i,j,k}^{o,u} = \begin{cases} -3, & \text{(Hinterkantenpunkt der Unterseite)} \\ -1, & \text{(ordinärer Konturnetzpunkt der Unterseite)} \\ 0, & \text{(initialer Nasenpunkt, später Staupunkt)} \\ 1, & \text{(ordinärer Konturnetzpunkt der Oberseite)} \\ 2, & \text{(später Nasenpunkt)} \\ 3, & \text{(Hinterkantenpunkt der Oberseite)} \\ 4, & \text{(doppeldeutige Konturnetzpunkte)} \\ 7, & \text{(Initialisierungswert aller Konturnetzpunkte)} \end{cases} . \quad (6.11)$$

In `uplo5` werden die Konturnetzpunkte in Richtung aufsteigender x-Werte sortiert.

Es ist an dieser Stelle zu ergänzen, dass die durch die Aufteilung der Profilkomponenten entstandene Datenstruktur lediglich für die feinste Netzebene vorliegt. Diese Datenstruktur stützt sich im Wesentlichen auf die Ordnung der Daten in sechs Feldern. Die Größe dieser sechs Datenfelder entspricht der Anzahl der Netzpunkte je Profilkomponente. Diese Anzahl ist in dem integer-Feld `l112siz(npart)`, mit `npart` als Nummer der Komponente, gespeichert. Die Speicheradresse des Beginns der sechs Datenfelder ist über die sechs komponentenbezogenen Zeiger `iipfsrtd`, `iipisrtd`, `iipjsrtd`, `iipksrtd`, `iipmsrtd` und `iiplsrtd` bekannt. Jedes der Felder wird nachfolgend einfach über die Angabe des Zeigers gekennzeichnet. Den Feldern kommt die Bedeutung aus Tab. 6.5 zu.

Diese Daten in den Feldern sind in Richtung aufsteigender x-Koordinate der betreffenden Konturnetzpunkte ausgehend vom Nasenpunkt bzw. Staupunkt geordnet.

Feld	Bedeutung
iipfsrtd	eindimensionales Feld der Werte von $\mathcal{F}^{0,u}$ aller Konturnetzpunkte der betreffenden Komponente
iipisrtd iipjsrtd iipksrtd	je ein eindimensionales Feld pro Index i,j,k aller Konturnetzpunkte der betreffenden Komponente
iipmsrtd	eindimensionales Feld der Blocknummern aller Konturnetzpunkte der betreffenden Komponente
iiplsrtd	eindimensionales Feld der Segmentnummern aller Konturnetzpunkte der betreffenden Komponente

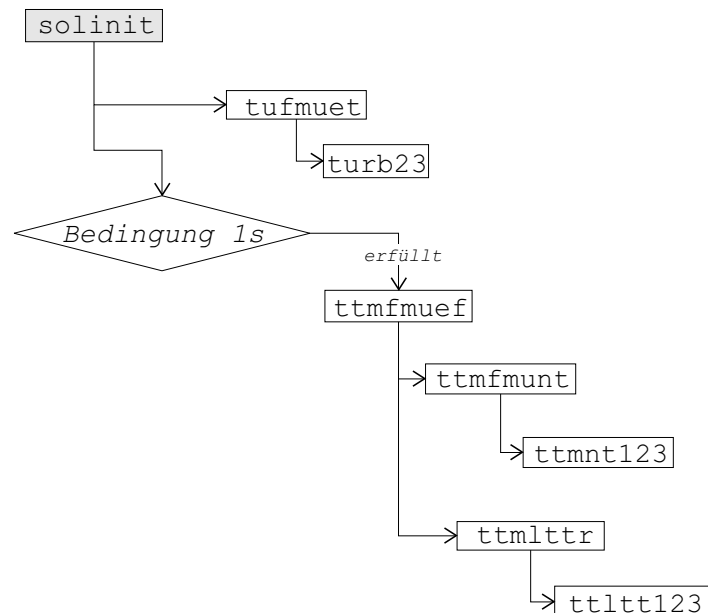
Tab. 6.5. Grundlegende Datenfelder der TT-Modellierung

### 6.2.3 Modellberechnung in `solutn`

Um die Änderung der turbulenten Wirbelviskosität zur Fluktuationsviskosität in allen betreffenden Berechnungsroutinen wirksam zu machen, ist es notwendig, dass Feld der errechneten turbulenten Wirbelviskosität zur Speicherung der Werte der Fluktuationsviskosität zu nutzen. Die Berechnung der turbulenten Wirbelviskosität, als über die Intermittenzfunktion gewichteten Anteil der Fluktuationsviskosität, ist weiterhin zu errechnen. Die Änderungen, die die Berechnung der Fluktuationsviskosität betreffen, beschränken sich auf die Routine `solinit`. Nachfolgend sind die Programmerweiterungen in den Routinen `solinit` und `fluxes` dokumentiert.

#### Die erweiterte Routine `solinit`

Abb. 6.8 zeigt die implementierten Programmerweiterungen der Routine `solinit`. Die Werte des

Abb. 6.8. Programmerweiterung in `solinit`

turbulenten Anteils an der Fluktuationsviskosität sind in `tufmuet` durch eine dem Turbulenzmodell

entsprechende `turb`-Routine für jeden Netzkpunkt berechnet worden und im Feld `fmuet` abgespeichert. Anschließend ist bei aktiviertem TT-Modell die Bedingung 1s unter bestimmten Umständen erfüllt. Die Bedingung ist abhängig von den Eingabeparametern des TT-Modells, die in Kap. 6.2.1 beschrieben sind. Die Art der Bedingung selbst ist dem Strukturdiagramm aus Anh. A.4 entnehmbar. Die Routine `ttmfmudef` steuert die Berechnung des nicht-turbulenten Anteils an der Fluktuationsviskosität (`ttmfmnt`) und die Berechnung der eigentlichen Fluktuationsviskosität aus beiden zuvor genannten Anteilen (`ttmlttr`). Die beiden zuletzt genannten Routinen realisieren die Infrastruktur zur Kopplung des TT-Modells mit unterschiedlichen Turbulenzmodellen. Auf der Ausführungsebene unterhalb von `ttmfmnt` und `ttmlttr` ist so je eine Routine für eine spezielle Kopplungsvariante implementierbar. Implementiert ist lediglich die Kopplung mit dem  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell nach Wilcox. Daher bestehen bisher nur die Routinen `ttmnt123` und `ttl123` auf jener Ausführungsebene.

Die Routine `ttmnt123` berechnet den nicht-turbulenten Anteil der Fluktuationsviskosität als

$$\mu_{nt}|_{i,j,k} \leftarrow \beta^* a \frac{(\tilde{\rho k})_{i,j,k}}{\omega_{ts}|_{i,j,k}}. \quad (6.12)$$

Diese Berechnung geht auf die Formulierung des nicht-turbulenten Anteils der Fluktuationsviskosität aus (4.47) zurück. Die Berechnung der Werte erfolgt wie für den turbulenten Anteil der Fluktuationsviskosität in `turb23` für jeden physikalischen Netzkpunkt, sowie für die zuzüglichen Netzkpunkte. Die Werte werden in einem statisch allokierten Feld gespeichert, welches der Speicherung sämtlicher Werte dient, die im Rahmen des TT-Modells für alle physikalischen Netzkpunkte zuzüglich der Hilfspunkte errechnet werden müssen. Da die Routine `solinit` von je einer Schleife über die Anzahl aller Mehrgitterebenen und die Anzahl aller Blöcke umrahmt ist, ist das innerhalb von `ttmnt123` mit Werten befüllte Feld abhängig von der Blocknummer `mbl` und der Netzebenennummer `level`. Genaugenommen ist also von Feldern zur Speicherung der nicht-turbulenten Viskosität zu sprechen. Die Speicheradressen dieser Felder werden im Zeigerfeld `ipttmvmem(mbl, level)` gespeichert. Das gesamte Feld aller Werte, die in dem durch den Zeiger `ipttmvmem` bestimmten Feld gespeichert sind, wird nachfolgend mit `ttmvmem` bezeichnet. Das Feld wird während der Speicherung der nicht-turbulenten Viskosität dennoch mit `fmuent` gekennzeichnet.

Die Routine `ttl123` speichert die über die Intermittenzfunktion gewichtete Summation der nicht-turbulenten, sowie turbulenten, Viskosität im Feld `fmuet` ab. Die zuvor darin gespeicherten Werte der turbulenten Viskosität werden also mit den Werten der gesamten Fluktuationsviskosität überschrieben. Die Werte der Intermittenzfunktion aller Netzkpunkte, einschließlich der Hilfspunkte, wird im Feld für den laminaren/turbulenten Status gespeichert. Dieser Status wird über den Funktionswert  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$  an jedem Netzkpunkt bestimmt (vgl. Kap. 5.6). Die Funktion nimmt den Wert null für einen laminaren Netzkpunkt und den Wert eins für einen turbulenten Netzkpunkt an. Die zuvor getroffenen Aussagen beziehen sich auf eine Berechnung bei Punkttransition. Speichert man in diesem Feld Werte zwischen null und eins, so ist über die Gewichtung von Strömungsgrößen mit  $(1 - \mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t})$  und mit  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$  die Wirkung der Intermittenzfunktion im Programmsystem abbildbar. Die Fluktuationsviskosität wird also bestimmt durch

$$\mu_f|_{i,j,k} \leftarrow (1 - \mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}) \mu_{nt}|_{i,j,k} + \mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} \mu_t|_{i,j,k} \quad (6.13)$$

$$\mu_t|_{i,j,k} \leftarrow \mu_f|_{i,j,k}. \quad (6.14)$$

Um die Berechnung der Werte der Fluktuationsviskosität nach (6.13) durchführen zu können, müssen an dieser Stelle für jeden Netzkpunkt  $(i,j,k)$  der Wert von  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$  und von  $\mu_{nt}|_{i,j,k}$  bekannt sein.



Die Werte für  $\mu_{nt|i,j,k}$  sind zurückzuführen auf den Wert der TS-Kreisfrequenz  $\omega_{ts|i,j,k}$  am entsprechenden Netzknoten. Die Werte der laminar/turbulenten Statusfunktion  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{lt}$  gehen zurück auf die Kenntnis der diskreten Lage des Transitionsbereichs bzw. des Transitionspunkts. Die Werte dieser beiden Größen werden innerhalb eines TT-Präparationsmoduls auf der Basis der Strömungslösung des vorangegangenen Zeitintegrationsschrittes berechnet und somit an dieser Stelle für den aktuellen Zeitintegrationsschritt, sowie für alle Blöcke und Netzebenen zur Verfügung gestellt. Die Werte der Statusfunktion sind in block- und netzebenenabhängigen Feldern gespeichert. Die Speicheradressen sind im Zeigerfeld `ipltflag(mbl, level)` gespeichert. Das gesamte Feld wird nunmehr mit `ltflag` bezeichnet. Die Werte der TS-Kreisfrequenz sind vor Berechnung der nicht-turbulenten Fluktuationsviskosität in `ttmfmnt123` im Feld `ttmvmem` gespeichert. Die Werte der TS-Kreisfrequenz werden dann im Rahmen der Berechnung der nicht-turbulenten Fluktuationsviskosität durch diese überschrieben. Das TT-Präparationsmodul ist in Kap. 6.2.4 dokumentiert.

### Die erweiterte Routine `fluxes`

Innerhalb der Routine `fluxes` liegt ein besonderer Fokus auf der Quellenberechnung der Turbulenzmodelle. Die eigentliche Quellenberechnung erfolgt in einer der zum Turbulenzmodell gehörenden UnterROUTINEN innerhalb von `tusource`. Die Erweiterungen der Routine `fluxes` für die Implementierung des TT-Modells sind in Abb. 6.9 dargestellt. Weil die bestehende Infrastruktur der Turbu-

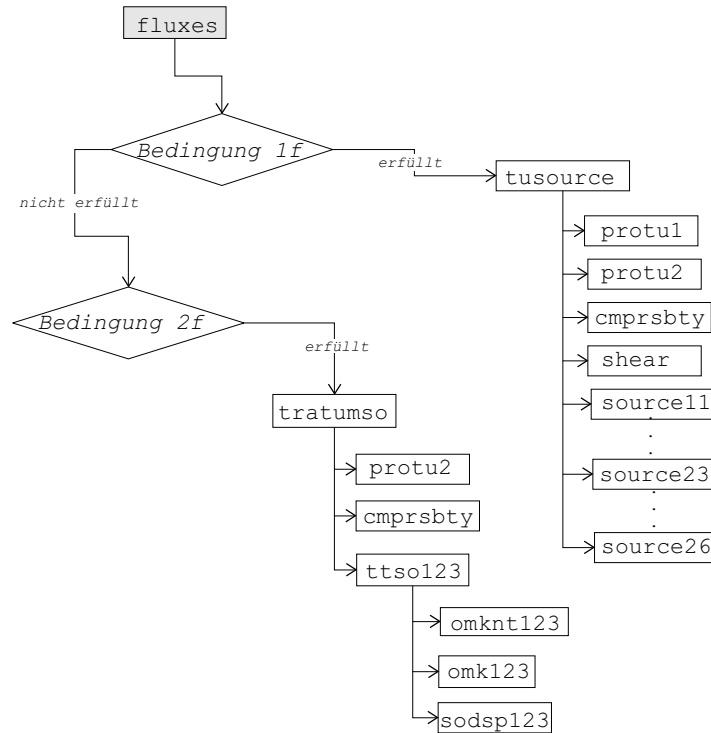


Abb. 6.9. Programmerweiterung in `fluxes`

lenzberechnung unverändert bestehen bleiben soll, eine Implementierung des TT-Ansatzes aber starke Veränderungen in der Routine der Quellenberechnung `source23` erforderlich macht, ist die Routine `tusource` gänzlich im TT-Berechnungsprozess ausgeklammert worden.

Bei aktiviertem TT-Modell bewirkt die Bedingung 1f, dass die Routine `tusource` nicht ausgeführt wird. Stattdessen wird bei erfüllter Bedingung 2f die Routine `tratumso` durchlaufen, die sich in ihrer Struktur stark an der Routine `tusource` orientiert. Die Art der Bedingungen 1f und 2f sind dem Strukturdiagramm aus Anh. A.5 entnehmbar. Die Routine `tratumso` verfolgt wiederum das Konzept, eine Modulstruktur für die Kopplung des Transitionsmodells mit verschiedenen Turbulenzmodellen zur Verfügung zu stellen. Der Kopplung mit dem  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell nach Wilcox dient die Routine `ttso123`. Die Quellenberechnung bei Zweigleichungsturbulenzmodellen ist abhängig von der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes und der zweiten Invarianten des Dehnratentensors. Die Werte in den Feldern `rdivq` und `rstra`, die in der Routine `protu2` berechnet werden, approximieren die zuvor genannten Größen für jeden Netzkpunkt. Die Routine `cmprsbty` stellt die Programmeinheit zur Kompressibilitätskorrektur der Koeffizienten  $\beta^*$  und  $\beta$  dar. Da jedoch bei aktiviertem TT-Modell der Eingabeparameter zur Steuerung der Variante der Kompressibilitätskorrektur `CMPCOR` auf den Wert null fixiert ist, gilt für die im Rahmen der Quellenberechnung verwendeten Größen  $\beta_C^* \leftarrow \beta^*$  und  $\beta_C \leftarrow \beta$ .

Die Routine `ttso123` untergliedert sich in drei Unterrouتين mit den Einzelaufgaben der Berechnung des nicht-turbulenten Anteils der Fluktuationsdissipationsrate (`omknt123`), der Summation des gewichteten nicht-turbulenten und turbulenten Anteils an der Fluktuationsdissipationsrate (`omk123`), sowie die eigentliche Quellenberechnung (`sodsp123`). Die Berechnung des nicht-turbulenten Anteils der Fluktuationsdissipationsrate in `omknt123` erfolgt für alle Netzkpunkte zuzüglich der Hilfspunkte durch

$$(\bar{\rho}\tilde{\omega}_{k,nt})|_{i,j,k} \leftarrow \frac{a}{\beta^*} \bar{\rho}_{i,j,k} \frac{\mu_t|_{i,j,k}}{\mu_m|_{i,j,k}} \tilde{S}^{i,j,k} \quad (6.15)$$

mit

$$\tilde{S}^{i,j,k} \leftarrow \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{S}_{i,j,k}^* - \frac{1}{3} (\text{Sp}(\underline{\tilde{S}})|_{i,j,k})^2}. \quad (6.16)$$

Zu (6.15) ist anzumerken, dass sich  $\mu_t|_{i,j,k}$  auf die abgespeicherten Werte im Feld `fmuet` bezieht, welches bei reiner Turbulenzrechnung die Werte der turbulenten Wirbelviskosität beinhaltet. An dieser Stelle sind aber in diesem Feld die Werte der errechneten Fluktuationsviskosität gespeichert. Die errechneten Werte für  $(\bar{\rho}\tilde{\omega}_{k,nt})|_{i,j,k}$  werden im Feld `ttmvmem` gespeichert. Die Routine `omk123` errechnet die gewichtete Summation des nicht-turbulenten und turbulenten Anteils an der turbulenten Dissipationsrate gemäß

$$(\bar{\rho}\tilde{\omega}_k)|_{i,j,k} \leftarrow \left(1 - \mathcal{F}_{i,j,k}^{lt}\right) (\bar{\rho}\tilde{\omega}_{k,nt})|_{i,j,k} + \mathcal{F}_{i,j,k}^{lt} (\bar{\rho}\tilde{\omega})|_{i,j,k}. \quad (6.17)$$

Die Berechnung der Quellen erfolgt innerhalb von `sodsp123` mit den abgeänderten Produktionstermen gegenüber (6.1) als

$$P_{k,m}|^{i,j,k} \leftarrow \min [P_k|^{i,j,k}, k_{k,P} \cdot DS_k|^{i,j,k}] \quad (6.18)$$

mit

$$P_k|^{i,j,k} \leftarrow P_k^{(1)}|^{i,j,k} - P_k^{(2)}|^{i,j,k} \quad (6.19)$$

$$P_k^{(1)}|^{i,j,k} \leftarrow \mu_t|_{i,j,k} \tilde{S}_{i,j,k}^* \quad (6.20)$$

$$P_\omega^{(1)}|^{i,j,k} \leftarrow \alpha \frac{(\bar{\rho}\tilde{\omega})_{i,j,k}}{(\bar{\rho}k)_{i,j,k}} P_k^{(1)}|^{i,j,k}. \quad (6.21)$$

Der Exponent des Limitierungsfaktors  $k_{k,P}$  wurde gegenüber (6.2) entfernt. Dadurch wird eine numerisch motivierte Methode zur Erzeugung laminarer Strömungsbereiche ersetzt durch eine physikalisch motivierte Methode. Die numerisch motivierte Vorgehensweise begrenzt die Quelle der kinetischen Turbulenzenergie auf Werte kleiner oder gleich null. Das TT-Modell sollte in der Lage sein, in physikalisch sich einstellenden laminaren Strömungsregionen den laminaren Strömungszustand durch geeignete Modifikation der Quellen von  $\tilde{k}$  und  $\tilde{\omega}$  herbeizuführen. Der Limitierungsfaktor (ohne Exponent)  $k_{k,P}$  verbleibt in (6.18), um über ein Beeinflussungsinstrument der Produktion an kinetischer Turbulenzenergie in Strömungsbereichen zu verfügen, die zu einer unphysikalischen Überproduktion an kinetischer Turbulenzenergie neigen.

#### 6.2.4 Modellpräparation in `solutn`

Das Präparationsmodul dient der Berechnung des Feldes der TS-Kreisfrequenzwerte  $\omega_{ts}|_{i,j,k}$  und des Feldes der Strömungsstatusfunktionswerte  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$ . Beide Felder sind abhängig von der Strömungslösung des aktuellen Iterationsschrittes. Der Datenaustausch zwischen dem Bereich der Zeitintegration und der Bewegungsgleichungen und dem Präparationsmodul ist in Abb. 6.10 dargestellt. Die Bestim-

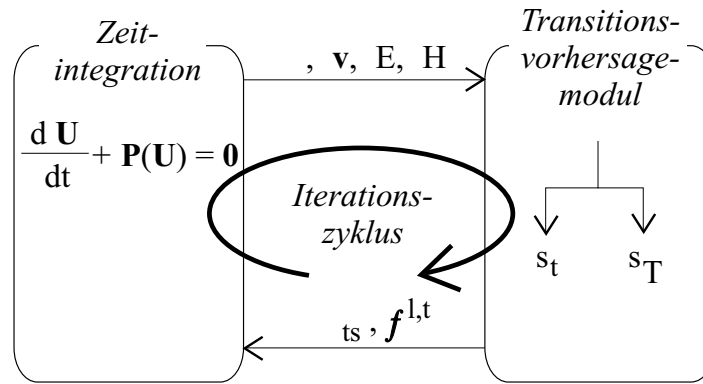


Abb. 6.10. Datenaustausch zwischen Zeitintegrations- und TT-Präparationsbereich

mung der Strömungsstatusfunktionswerte  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t}$  geht auf die Bestimmung des Transitionsbeginns  $s_t$  und des Transitionsendes  $s_T$  zurück. Dieses Bestimmungsproblem ist in die Bestimmung des Transitionsbeginns  $s_t$  und der Transitionslänge  $L_T$  überführbar. Diese beiden Größen stellen zunächst kontur- und komponentenbezogene Daten dar, die auf den umgebenden Netzbereich zu übertragen sind. Derselbe Sachverhalt gilt für die TS-Kreisfrequenzwerte. Alle konturbezogenen Daten sind abhängig von Strömungswerten am Grenzschichtrand und vom Abstand des jeweiligen Konturnetzpunktes zum Staupunkt, gemessen in Einheiten einer krummlinigen Konturkoordinate  $s$ .

Daraus ist folgende Bestimmungsabfolge für jede Profilkomponente abzuleiten:

1. Initialisierung der TS-Kreisfrequenz für jeden Netzkpunkt
2. Bestimmung des Staupunktes
3. Bestimmung des Abstandes aller Konturnetzpunkte zum Staupunkt
4. Bestimmung der Grenzschichtdicke für jeden Konturnetzpunkt
5. Bestimmung der Strömungsgrößen am Grenzschichtrand
6. Bestimmung der TS-Kreisfrequenz für jeden Konturnetzpunkt

7. Übertragung der konturbezogenen Werte für die TS-Kreisfrequenz auf die verbleibenden Netzpunkte
8. Bestimmung der Transitionslage
9. Bestimmung der Transitionslänge
10. Initialisierung des laminar/turbulenten Status jedes Netzpunktes
11. Bestimmung des laminar/turbulenten Status aller Konturnetzpunkte
12. Übertragung der konturbezogenen Werte des laminar/turbulenten Status auf die verbleibenden Netzpunkte
13. Belegung der Hilfspunkte mit Werten der TS-Kreisfrequenz und des laminar/turbulenten Status
14. Übertragung der Werte für die TS-Kreisfrequenz der feinsten Netzebene auf die gröberen Netzebenen
15. Übertragung der Werte für den laminar/turbulenten Status der feinsten Netzebene auf die gröberen Netzebenen

Aus dieser Bestimmungsabfolge ergab sich die implementierte Programmstruktur des Präparationsmoduls, wie sie in Abb. 6.11 dargestellt ist. Das Präparationsmodul wird zum ersten Mal ausgeführt, wenn der Iterationsschritt auf der feinsten Netzebene den Wert des Parameters `NTTMSTRT` erreicht. Die Ausführung der Routinen `tufmuf` und `tratumso` finden im anschließenden Iterationsschritt statt. Denn diese Routinen beruhen auf den Größen, die im Präparationsmodul erst ermittelt werden. Nachfolgend werden die einzelnen Routinen der Abb. 6.11 in ihrer Wirkungsweise kurz erläutert.

Die Routine `prpinit` bestimmt die Konstante  $a$  als Funktion des Wertes, der durch den Parameter `RTMTU0` festgelegt wurde. Diese Routine wird nur einmal ausgeführt, wenn die Anzahl der Iterationsschritte gleich dem Wert des Parameters `NTTMSTRT` ist.

In der Routine `sttmvar` wird das Feld der TS-Kreisfrequenzen an allen Netzpunkten inklusive der Hilfspunkte für alle Netzebenen und alle Blöcke initialisiert. Der Wert der TS-Kreisfrequenz bestimmt die nicht-turbulente Viskosität. Da außerhalb der laminaren Domäne  $\mathcal{F}^{l,t} \leftarrow 1.0$  gilt, wird gemäß (6.13) die Fluktuationsviskosität außerhalb der laminaren Domäne nicht aus nicht-turbulenten Anteilen gebildet. Innerhalb der laminaren Domäne wird die TS-Kreisfrequenz als Funktion des Abstandes zum Staupunkt und Strömungsgrößen des Grenzschichtrandes berechnet und der initialisierte Wert daher wieder überschrieben werden. Deshalb ist der Wert der Initialisierung nicht entscheidend. Um bei der Berechnung der nicht-turbulenten Viskosität jedoch eine Division durch null zu vermeiden, wurde die Initialisierung als  $\omega_{ts}|_{i,j,k} \leftarrow 1.0$  durchgeführt.

Die Routinen `stagpnt` bis `gttsfreq` sind von einer Schleife über die Anzahl der an der TT-Modellierung beteiligten Profilkomponenten umrahmt. Innerhalb dieser Routinen wird jeweils eine Schleife über die verfügbaren Seiten der Strömungskonfiguration geführt. Die verfügbaren Seiten wurden durch die Routine `sdchk` innerhalb von `uploside` ermittelt.

Die Routine `stagpnt` ermittelt für eine Komponente die Lage des Staupunktes als Ort des maximalen Druckbeiwerts. Der Detektionsbereich ist über den Parameter `SSRCHMG` einschränkbar, um das Detektieren des Staupunktes in Bereichen weit ab des Auftreffpunktes der Strömung auf die Komponente zu vermeiden. Die Aufteilung des Profils richtet sich nach der Lage des Staupunktes. Als Ausgangspunkt der approximierten Skelettlinie gehört dieser Punkt zu Ober- und Unterseite. Bei veränderter Lage des Staupunktes gegenüber dem vorangegangenen Iterationsschritt wird die Einteilung des Profils in Ober- und Unterseite neu sortiert. Die Sortierung wird lediglich entsprechend der Lageänderung entlang der Komponentenkontur abgeändert.

In Abhängigkeit von der Lage des Staupunkts ermittelt die Routine `gtarclen` für jeden Konturpunkt den krummlinigen Abstand entlang der Kontur zum Staupunkt.

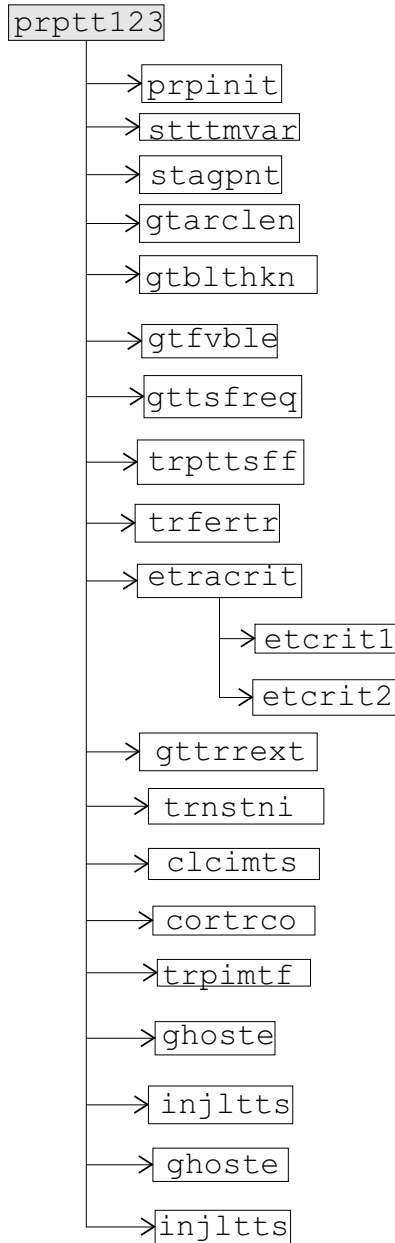


Abb. 6.11. Flussdiagramm der Routine prptt123

Die Routine `gtblthkn` ermittelt für jeden Konturpunkt die zugehörige Grenzschichtdicke. Diese wird durch die Anwendung der Diagnosefunktion aus Kap. 4.4 bestimmt. An jedem Konturpunkt wird sowohl die Diagnosefunktion für eine turbulente als auch laminare Grenzschicht ausgewertet. Die Grenzschichtdicke des Konturpunktes mit dem Konturlaufindex  $i_k$  wird unter Nutzung des laminar/turbulenten Statusfeldes durch

$$\delta_{i_k} \leftarrow (1 - \mathcal{F}_{i_k, j_k, k_k}^{l,t}) \delta_{\text{lam}, i_k} + \mathcal{F}_{i_k, j_k, k_k}^{l,t} \delta_{\text{turb}, i_k} \quad (6.22)$$

bestimmt. Die genau Vorgehensweise bei der Bestimmung notwendiger Werte zur Auswertung der Diagnosefunktion wird durch Abb. 6.12 veranschaulicht. Die Auswertung der Diagnosefunktion für

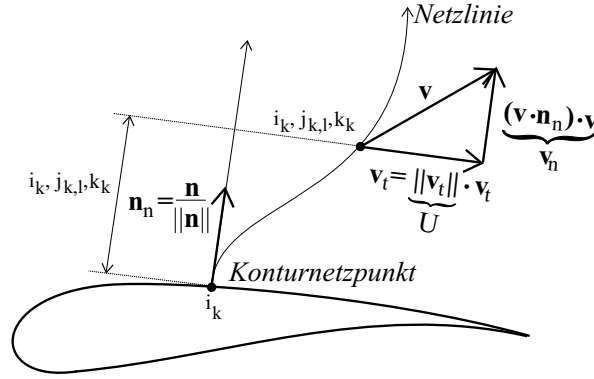


Abb. 6.12. Approximative Berechnung der Grenzschichtdicke

die Berechnung der Grenzschichtdicke am Konturnetzpunkt  $i_k$  geschieht entlang der Netzlinie, die ihren Ursprung am Konturnetzpunkt  $i_k$  hat. Die einzige Größe, die bei der Auswertung der Diagnosefunktion in konturnormaler Richtung bestimmt wird, ist die konturnormale Koordinate  $\eta_{i_k, j_k, \ell, k_k}$  mit  $j_k, \ell$  als Laufindex entlang der konturabgehenden Netzlinie. Die tangentialen Geschwindigkeitswerte des Netzpunktes  $i_k, j_k, \ell, k_k$  werden nicht an die Stelle inter- oder extrapoliert, die durch den konturnormalen Abstand  $\eta_{i_k, j_k, \ell, k_k}$  gegeben ist. Da dieses nicht geschieht, ist im Rahmen der Netzgenerierung darauf zu achten, dass möglichst konturnormale Netzlinien innerhalb der Grenzschicht vorliegen. Die Diagnosefunktion bedarf zur korrekten Approximation der Grenzschichtdicke eines wendepunktsfreien Geschwindigkeitsprofils der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung.

Die Routine `gtfvble` bestimmt die Werte für die kinematische Viskosität  $\nu_{\delta_{i_k}}$  und den Betrag der Geschwindigkeit  $q_{\delta_{i_k}}$  am Grenzschichtrand. Dies erfolgt unter ähnlichen Bedingungen, wie die Berechnung der Grenzschichtdicke selbst. Ausgehend vom Konturnetzpunkt  $i_k$  wandert das Verfahren entlang der konturabgehenden Netzlinie bis zum Netzpunkt, der der nächste in Laufrichtung nach Überschreiten des konturnormal-projizierten Abstands von der Größe der Grenzschichtdicke  $\delta_{i_k}$  ist. Die Strömungswerte am Grenzschichtrand selbst werden dann mittels linearer Interpolation zwischen den Werten des Netzlinienpunktes  $i_k, j_k, \ell + 1, k_k$  und  $i_k, j_k, \ell, k_k$  bestimmt. Dies folgt den Vorschriften

$$\nu_{\delta_{i_k}} \leftarrow \nu_{i_k, j_k, \ell, k_k} + (\delta_{i_k} - \eta_{i_k, j_k, \ell, k_k}) \cdot \frac{\nu_{i_k, j_k, \ell + 1, k_k} - \nu_{i_k, j_k, \ell, k_k}}{\eta_{i_k, j_k, \ell + 1, k_k} - \eta_{i_k, j_k, \ell, k_k}}, \quad (6.23)$$

$$q_{\delta_{i_k}} \leftarrow q_{i_k, j_k, \ell, k_k} + (\delta_{i_k} - \eta_{i_k, j_k, \ell, k_k}) \cdot \frac{q_{i_k, j_k, \ell + 1, k_k} - q_{i_k, j_k, \ell, k_k}}{\eta_{i_k, j_k, \ell + 1, k_k} - \eta_{i_k, j_k, \ell, k_k}}. \quad (6.24)$$

Der Verdeutlichung dient die Abb. 6.13.

Die Berechnung der TS-Kreisfrequenzen erfolgt auf der Basis der ermittelten Strömungswerte am Grenzschichtrand und des Abstands zum Staupunkt in der Routine `gttsfreq`.

Die Übertragung der konturgebundenen Werte der TS-Kreisfrequenzen auf alle weiteren blockgebundenen Feldnetzpunkte geschieht in der Routine `trpttsff`. Die Übertragung erfolgt in der Weise, dass jedem physikalischen Feldnetzpunkt der einen geringeren Abstand zum nächsten Konturnetzpunkt aufweist, als durch den Parameter `DISLIM` angegeben wird, der entsprechende Wert der TS-Kreisfrequenz des nächsten Konturnetzpunkt zugewiesen wird.

Da die Speicherung der Transitionslagen im Verfahren bis zu dieser Stelle als globale Koordinatenwerte erfolgte, der Transitionsvorhersagealgorithmus der TT-Modellierung aber auf Abstandsangaben zum Staupunkt basiert, werden die globalen Koordinatenwerte der Transitionslage in der

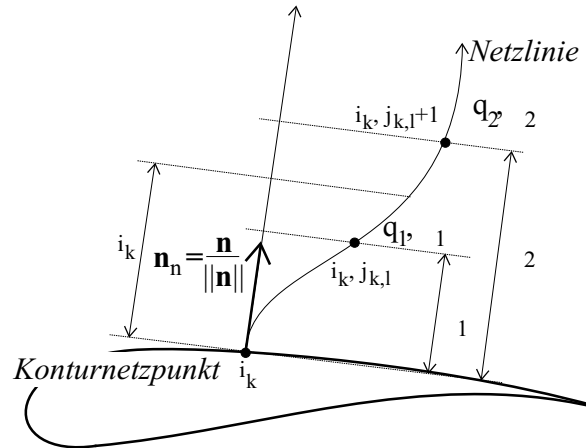


Abb. 6.13. Berechnung von Strömungsgrößen des Grenzschichtandes

Routine `trfertr` in diese Abstandswerte übertragen. Desweiteren werden die Transitionslagen hier unabhängig von der Einstellung des Parameters `TRMETH` in die komponentenbezogenen Felder `xtranu` und `xtranl` gespeichert.

Die eigentliche Transitionsvorhersage wird durch die Routine `etracrit` ermöglicht. Für das Transitionskriterium aus Kap. 4.3 geschieht die Transitionsvorhersage, wie nachfolgend geschildert wird. Das Verfahren marschiert für jede verfügbare Profilseite entlang der Konturnetzpunkte. Für jeden Konturnetzpunkt marschiert das Verfahren entlang der konturabgehenden Netzlinie und wertet an jedem Netzlinienpunkt das Transitionskriterium aus. Ist die Bedingung für Transition an einem dieser Netzlinienpunkte erfüllt, so wird der konturgebundene Transitionspunkt mittels Interpolation zwischen vorangegangenem und aktuellem Konturnetzpunkt bestimmt. Die Randwerte des Interpolationsintervalls sind die beiden Abstände der Konturnetzpunkte zum Staupunkt  $s_{i_k} - 1$  und  $s_{i_k}$ , sowie der maximal angenommene Wert des Kriteriums aller Netzlinienpunkte der vorangegangenen Netzlinie  $C_{krit, |i_k-1}^{max}$  und der Wert des Kriteriums am aktuellen Netzlinienpunkt  $C_{krit, |i_k, j_k, l, k_k}$ , der die Transitionsbedingung zuerst erfüllt hat. Der Veranschaulichung dieser Interpolation dient die Abb. 6.14. Die Lage im Speicherfeld aller Konturnetzpunktindizes (`iipisrtd`) der Konturnetzpunkte, die das Intervall für den Transitionsbeginn beranden, werden gespeichert im Feld `istri`.

Die Transitionslänge wird über die im Kap. 3.2.5 dokumentierten Korrelation zwischen der Reynolds-Zahl, gebildet mit Werten des Grenzschichtandes und der Kenngröße der Transitionsausdehnung  $\lambda$ , und der Reynolds-Zahl, gebildet mit Werten des Grenzschichtandes und dem krummlinigen Abstand des Transitionsbeginns zum Staupunkt. Die Kenngröße der Transitionsausdehnung wird in der Routine `gttrrext` berechnet und für die verfügbaren Profilseiten in den Feldern `xlenu` und `xlenl` gespeichert. Die gespeicherten Intervallindexwerte des Transitionsbeginns (`istri`) werden dazu verwendet, um die benötigten Strömungswerte am Grenzschichttrand für den Konturpunkt des Transitionsbeginns aus den Werten der benachbarten Konturnetzpunkte zu interpolieren. Denn die kinematische Viskosität und der Betrag der Geschwindigkeit am Grenzschichttrand wurden bereits für alle Konturnetzpunkte in der Routine `gtfvble` ermittelt und in den Feldern gespeichert, die durch die Zeiger `ipnuble` und `ipvelble` charakterisiert werden.

Anschließend wird das laminar/turbulente Statusfeld  $\mathcal{F}^{l,t}$  für alle Blöcke und Netzebenen auf allen Netzpunkten in der Routine `trnstni` initialisiert.

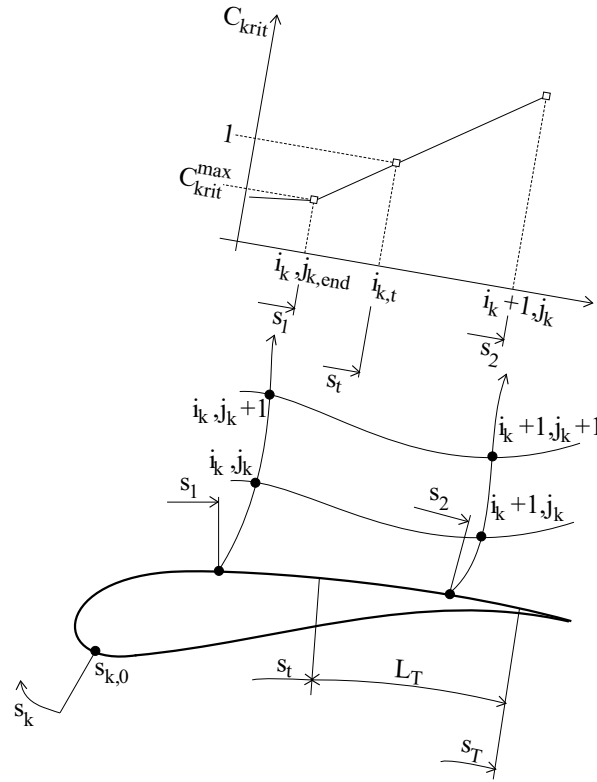


Abb. 6.14. Auswertung des Transitionskriteriums

Die berechneten Transitionsbeginne und die Kenngrößen der Transitionsausdehnung werden in der Routine `clcimts` dazu verwendet, um für alle Konturnetzpunkte die Intermittenzverteilung durch

$$\mathcal{F}_{i_k}^{l,t} \leftarrow 1 - e^{-A\xi^2} \quad \text{mit} \quad \xi = \max\left(\frac{s_{i_k} - s_t, 0}{\lambda}\right) \quad (6.25)$$

zu bestimmen.

Innerhalb der Routine `cortrco` werden die Werte des Transitionsbeginns, die hier den Abstand zum Staupunkt darstellen, in globale Koordinaten übertragen und in den Feldern gespeichert, die mit der Einstellung des Parameters `TRMETH` korrespondieren.

Die konturgebundenen Intermittenzwerte werden nun in der Routine `trpimtf` in das umgebende Feld übertragen. Die Übertragung erfolgt wiederum in der Weise, dass jedem physikalischen Feldnetzpunkt der einen geringeren Abstand zum nächsten Konturnetzpunkt aufweist, als durch den Parameter `DISLIM` angegeben wird, der entsprechende Wert der Intermittenz des nächsten Konturnetzpunkt zugewiesen wird. Die Werte der Hilfsnetzpunkte werden durch Extrapolation 0. Ordnung in der Routine `ghoste` bestimmt. Die Intermittenzverteilung, die nun für alle Netzpunkte aller Blöcke der feinsten Netzebene besteht, wird in der Routine `injlts` in die größeren Netzebenen injiziert.

In gleicher Vorgehensweise wird mit den vorliegenden Werten aller physikalischen Netzpunkte aller Blöcke auf der feinsten Netzebene verfahren. Damit ist die TT-Modellpräparation abgeschlossen.



## Ergebnisse

Dieses Kapitel widmet sich der Darstellung der Validierungsergebnisse der TT-Modellimplementierung. Das TT-Modell wurde für die Strömung um die längsangeströmte ebene Platte und für ein Laminar-Profil mit der Bezeichnung NLF(1)-0416 getestet. Die Umströmung erfolgt für beide Strömungsfälle im niedrigen Unterschall. Der eindeutige Validierungsschwerpunkt liegt auf der Simulation der Plattenströmung. Beide Simulationsfälle dienen der Überprüfung auf Programmierfehler, sowie der Untersuchung des TT-Modells hinsichtlich dessen Modellierungs- und Vorhersagefähigkeit von Transition.

### 7.1 Ebene Plattenströmung

Es wurden insgesamt zwei verschiedene Strömungsfälle der ebenen Plattenströmung simuliert. Die Mach-Zahl beider Strömungsfälle lag bei  $Ma_\infty = 0.071$ . Die Reynolds-Zahl entsprach für den einen Strömungsfall einem Wert von  $Re_\infty = 1.67 \cdot 10^6$ , während der andere Strömungsfall bei  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$  simuliert wurde. Beide Reynolds-Zahlen wurden gebildet mit der Plattenlänge, die jeweils die Ausdehnung einer dimensionslosen Netzeinheit hatte. Der Turbulenzgrad der freien Anströmung war für alle Simulationen der Plattenströmung durch  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-4}$  gegeben. Im Falle der ersten angegebenen Reynolds-Zahl in Verbindung mit dem genannten Turbulenzgrad ist gemäß der Abb. 3.3 keine Transition zu erwarten. Bei einer Reynolds-Zahl von  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$  sollte entsprechend jener Abbildung der Beginn der Transition etwa bei der Hälfte der Plattenlänge anzutreffen sein.

Die Simulationsnetze der Plattenströmung folgen alle den dargestellten Abmessungen aus Abb. 7.1. Der Beginn der Platte lag stets beim Wert 1.83 in dimensionslosen Netzkoordinaten der x-Richtung. Das Plattenende lag entsprechend der angegebenen Plattenlänge von 1 bei 2.83. Die Netzausdehnung in y-Richtung ist durch eine Punktzahl von 145 Netzpunkten bei allen Netzen aufgelöst. Es wurden Netze mit einer veränderten Auflösung in x-Richtung mit den Punktzahlen 40, 60, 80, 110, 160 und 320 auf der Platte verwendet. Nachfolgend werden die einzelnen Netze jeweils entsprechend ihrer Punktzahl in x-Richtung auf der Platte beispielsweise als 160'er Netz bezeichnet. Der Anströmungsbereich bis zum Plattenbeginn ist bei allen Netzen mit einer Punktzahl von 32 in x-Richtung aufgelöst. Die Auflösung der verwendeten Plattenetze in x- und y-Richtung sind durch die Abbildungen Abb. 7.2 und 7.3 dargestellt. Die x-Richtung wird durch einen steigenden Laufindex  $i$  repräsentiert, während die y-Koordinate mit dem Laufindex  $j$  steigt. Der Abb. 7.3 ist hinzuzufügen, dass für jede Reynolds-Zahl zur geeigneten Auflösung der turbulenten Grenzschicht ein dazu passendes Netz hinsichtlich des Abstandes der ersten Netzlinie in wandnormaler Richtung zu verwenden ist. Ein geeigneter Wandabstand der ersten Netzlinie in wandnormaler Richtung wird durch einen Wert

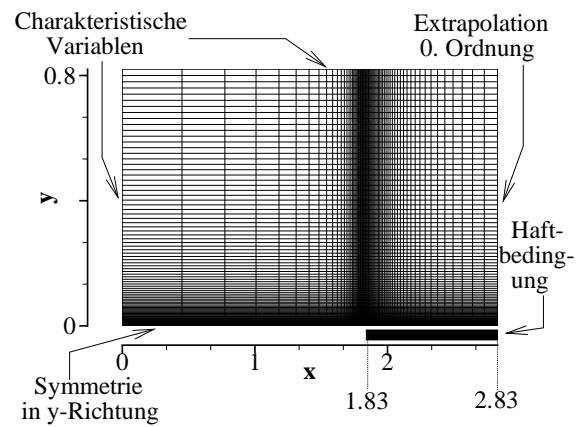
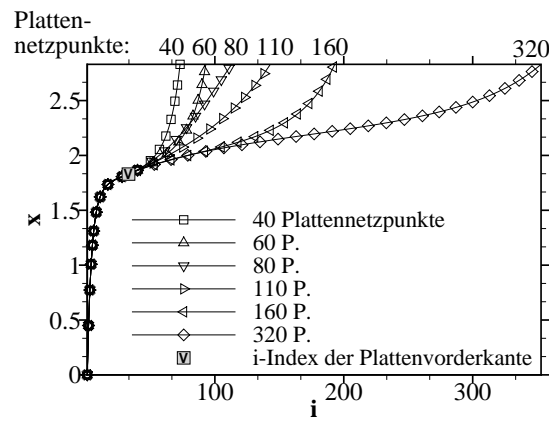
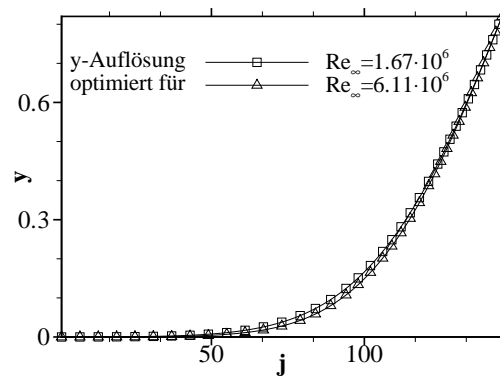


Abb. 7.1. Abmessungen und Randbedingungen der Plattenetze

Abb. 7.2. Auflösung in  $x$ -Richtung aller verwendeten PlattenetzeAbb. 7.3. Auflösung in  $y$ -Richtung aller verwendeten Plattenetze

$y^+ \approx 1$  erzielt. Die Abb. 7.1 gibt zudem die in der Simulation verwendeten Randbedingungen aller vier Integrationsränder an.

### 7.1.1 Plattenströmung ohne Transition

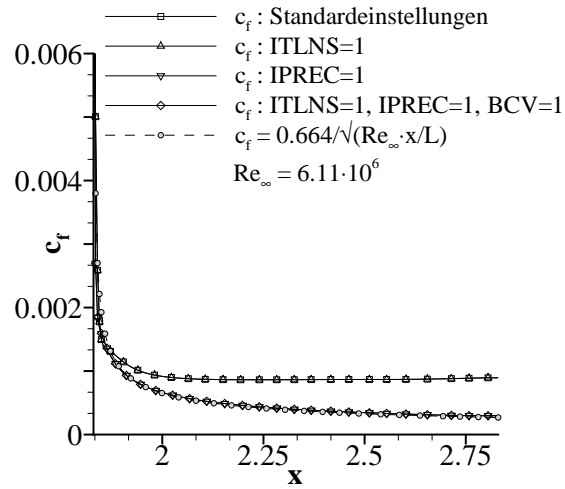
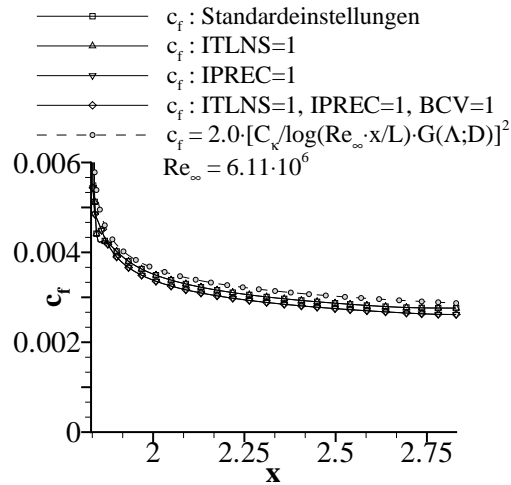
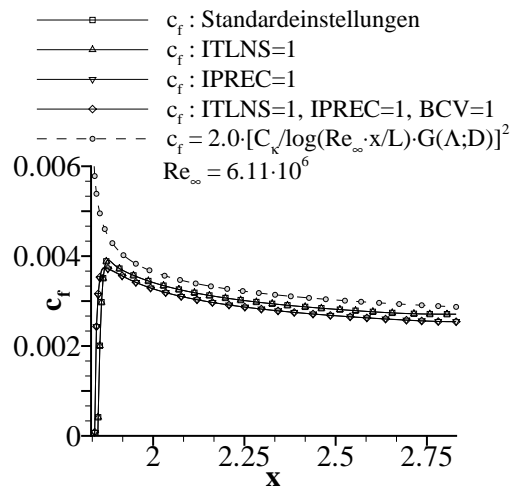
Nachfolgend wurde zunächst das Lösungsverhalten der Plattenströmung für die Bedingungen  $Ma_\infty = 0.071$  und  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$  bei Variation der Parameter  $IPREC$ ,  $ITLNS$  und  $BCV$  untersucht, um für weitere Rechnungen eine Grundeinstellung zu finden. Diese Untersuchungen wurden für eine laminar simulierte, als auch turbulente, unter Anwendung des Baldwin-Lomax und Wilcox-Modells, simulierte Strömung durchgeführt. Als Rechennetz wurde für diese Parametervariationen das 160'er Netz verwendet.

Der Vergleich der lokalen Reibungsbeiwerte dieser Rechnungen ist in den Abbildungen 7.4 bis 7.6 dokumentiert. Dabei ist zu beobachten, dass die Rechnungen für alle Strömungsfälle längs der gesamten Platte bei aktivierter Präkonditionierung ( $IPREC=1$ ) ein niedrigeres Niveau des lokalen Reibungsbeiwertes aufweisen. Dieses Resultat spiegelt sich in Folge dessen auch im integralen Widerstandsbeiwert wieder. Erst die aktivierte Präkonditionierung führt dazu, dass der Reibungsbeiwert der laminaren Strömung den analytische Wert der Blasius-Lösung geeignet approximiert. Zusätzlich führt die aktivierte Präkonditionierung zu einem verbesserten Konvergenzverhalten der Lösung. Dieser Sachverhalt wird durch die Darstellungen der Lösungskonvergenz in den Abb. 7.7 bis 7.9 dokumentiert.

In Folge der genannten Aspekte wird im Weiteren stets die Technik der Präkonditionierung verwendet. Der Einfluss der zirkulationsbasierten Korrektur des Geschwindigkeitsvektors am oberen Integrationsrand ( $BCV=1$ ) konnte in seiner alleinigen Wirkung nicht untersucht werden, da die Rechnung nicht konvergierte. Da die eingeschaltete Navier-Stokes Option keine alleinige Wirkung zeigte, wird die Wirkungsweise bei Aktivierung aller variierten Parameter alleinig auf die Wirkung der Präkonditionierung zurückgeführt.

Nachfolgend wird die Simulation der turbulenten Plattengrenzschicht bei Anwendung des Baldwin-Lomax- und des Wilcox-Modells qualitativ verglichen. Die dargestellten Ergebnisse diesbezüglich entstanden auch unter Nutzung der Präkonditionierung. Vergleicht man die Ausbildung der turbulenten Plattengrenzschicht im Bereich der Vorderkante, so zeichnen sich signifikante Unterschiede in der Ausbildung von turbulenter Wirbelviskosität ab. Das Wilcox-Turbulenzmodell neigt besonders im Bereich der Vorderkante, genauer gesagt bereits vor der Plattenvorderkante, zu einer im Übermaß gebildeten Wirbelviskosität. Dieses Verhalten zeigen die Abbildungen 7.10 und 7.11. Dargestellt in diesen beiden Abbildungen sind einerseits die Vektoren der Geschwindigkeiten an den Netzpunkten und andererseits als Konturdarstellung die Werte des Verhältnisses aus turbulenter Wirbelviskosität und molekularer Viskosität der Anströmung. Beim Vergleich der Werte der turbulenten Wirbelviskosität erkennt man, dass diese Werte beim Wilcox-Modell um ein Vielfaches größer vorhergesagt werden, als dies das Baldwin-Lomax-Modell tut. Besonders auffällig an der mit dem Wilcox-Modell simulierten Plattenströmung ist das ausgeprägte Rückströmungsgebiet der ersten drei Plattennetzknoten. Dieses Verhalten ist nicht physikalisch gerechtfertigt.

Dieses Verhalten wird auch durch die wandnormalen Profile der turbulenten Wirbelviskosität wiedergegeben. Im Bereich der Plattenvorderkante zeigt dies die Abb. 7.12 zuzüglich der Darstellung des Sichtausschnittes A in Abb. 7.13. Entlang der Platte gleicht sich dieses vom Beginn der Platte an sehr hohe Niveau an turbulenter Wirbelviskosität bei der Wilcox-Turbulenzmodellierung nicht an das Niveau der Baldwin-Lomax-Modellierung an. Dieses wird durch die Darstellung dreier wandnormaler Profile der turbulenten Wirbelviskosität entlang der Platte in Abb. 7.14 sichtbar.

Abb. 7.4. Lokaler Reibungsbeiwert  $c_f$  bei laminarer StrömungAbb. 7.5. Lokaler Reibungsbeiwert  $c_f$  bei turbulenter Strömung (Baldwin-Lomax)Abb. 7.6. Lokaler Reibungsbeiwert  $c_f$  bei turbulenter Strömung (Wilcox)

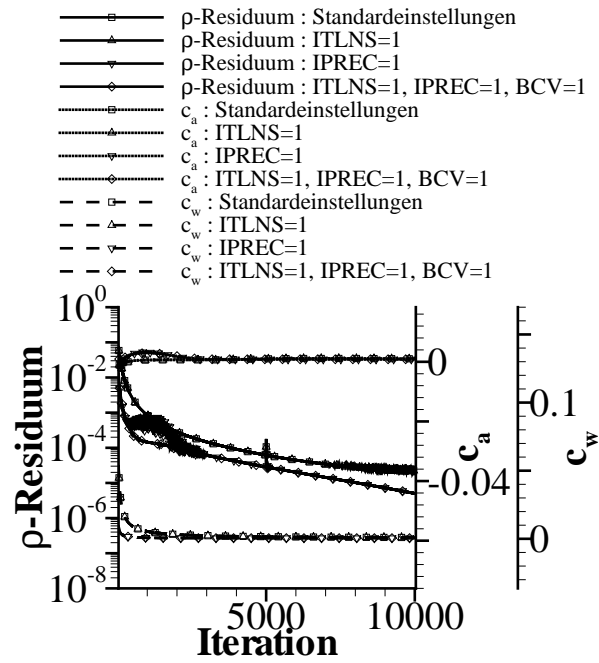


Abb. 7.7. Konvergenzverhalten bei laminarer Strömung

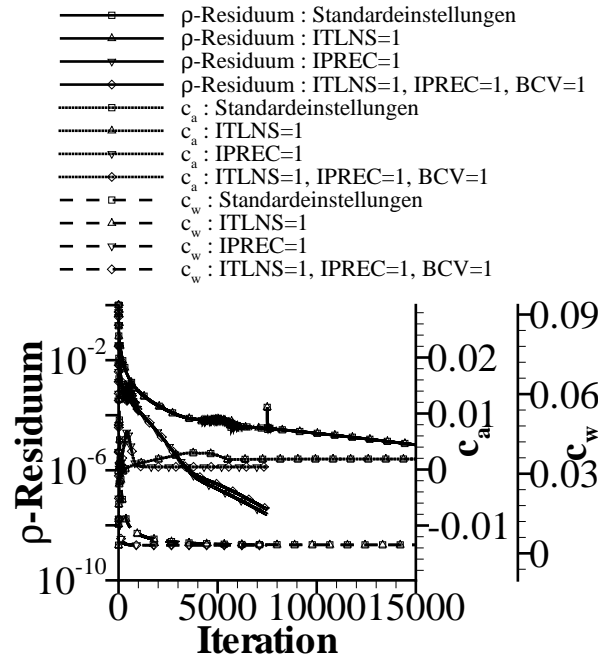


Abb. 7.8. Konvergenzverhalten bei turbulenter Strömung (Baldwin-Lomax)

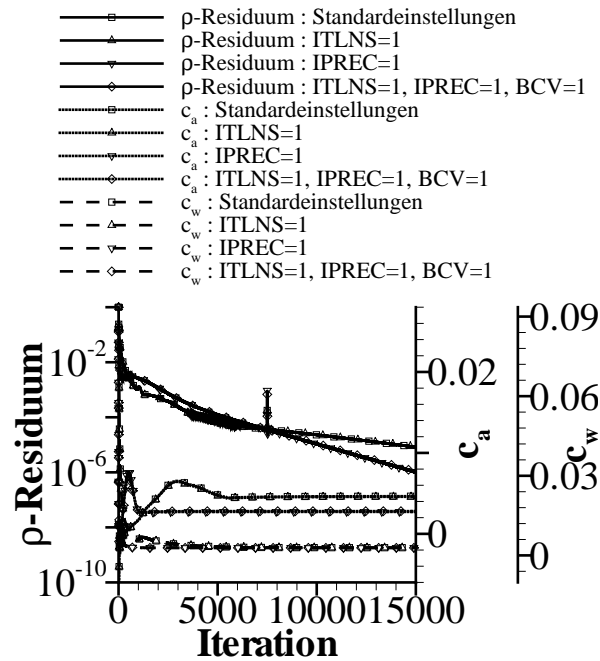
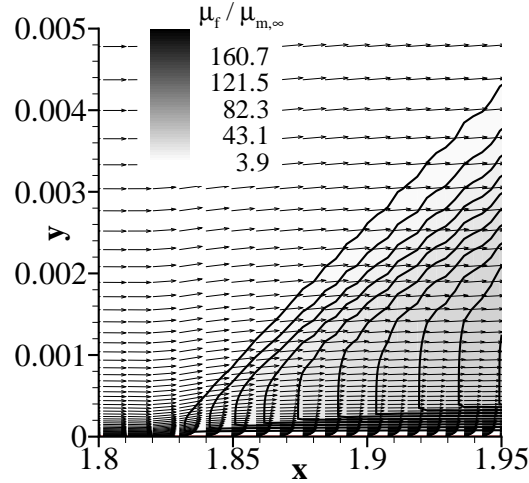


Abb. 7.9. Konvergenzverhalten bei turbulenter Strömung (Wilcox)

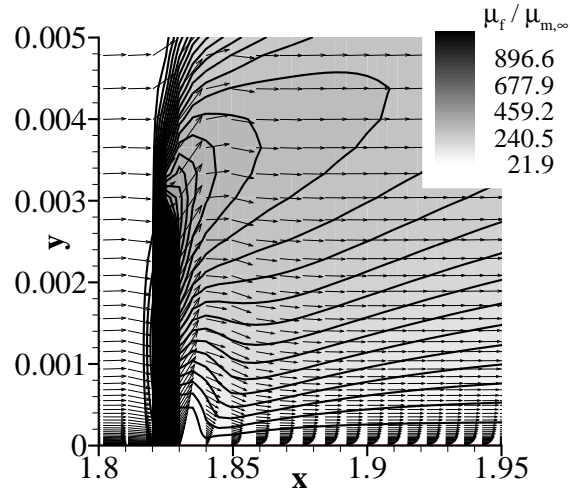
Abschließend folgt eine Betrachtung der beiden kartesischen Geschwindigkeitskomponenten in wandnormaler Profildarstellung. Nahe der Plattenvorderkante zeichnen sich die Profile der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung bei Baldwin-Lomax durch eine erheblich höhere Völligkeit aus. Durch Betrachtung des Sichtausschnitts A aus Abb. 7.15 wird erneut die Rückströmung am zweiten Netzkpunkt deutlich. Der Sichtausschnitt ist in Abb. 7.16 zu sehen. Das wandnormale Profil der Geschwindigkeitskomponenten in y-Richtung ist für den Bereich der Profilverkante in Abb. 7.17 dargestellt. Hierbei zeigt sich für den Netzkpunkt hinter dem Netzkpunkt der Rückströmung eine konsistente Ansaugwirkung auf die Strömung zur Platte hin, anstelle einer sich einstellenden Verdrängungswirkung bei einer Grenzschicht ohne Rückströmung. Die Profile beider kartesischer Geschwindigkeitskomponenten entlang der Platte sind in den Abbildungen 7.18 und 7.19 dargestellt.

Weiter wurde der Einfluss des eingestellten Turbulenzgrades der freien Anströmung auf das Lösungsverhalten der turbulenten Plattenströmung untersucht. Über den Wert des Turbulenzgrades der freien Anströmung errechnen sich im Verfahren die Randbedingungen für die kinetische Turbulenzenergie und die turbulente Dissipationsrate am Fernfeldrand. Diese wird zusätzlich durch die Einstellung für das Verhältnis aus turbulenter Wirbelviskosität und molekularer Viskosität am Einströmrand (Parameter  $RLTU$ ) beeinflusst. Dieser Parameter behält dennoch für alle Rechnungen bei variiertem Turbulenzgrad (Parameter  $TU0$ ) den Wert der Grundeinstellung bei.

Die Rechnungen unter Variation des Turbulenzgrades am Einströmrand wurden für den Strömungszustand  $Ma_\infty = 0.071$  und  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$  durchgeführt. Die Strömung wurde bei fixierter Transition bei 50 % der Plattenlänge mit der Technik laminarer Domänen, der bisherigen Transitionssetzungsmethode, simuliert. Die Transition wurde als Punkttransition simuliert. Sowohl das Konvergenzverhalten, als auch das Verhalten des lokalen Reibungsbeiwertes der Simulation ist in den Abbildungen 7.20 und 7.21 dargestellt. In beiden Abbildungen ist eine Abweichung des Lösungsverhaltens für den Turbulenzgrad von  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-1}$  gegenüber den sonstigen Einstellungen des Turbulenzgrades



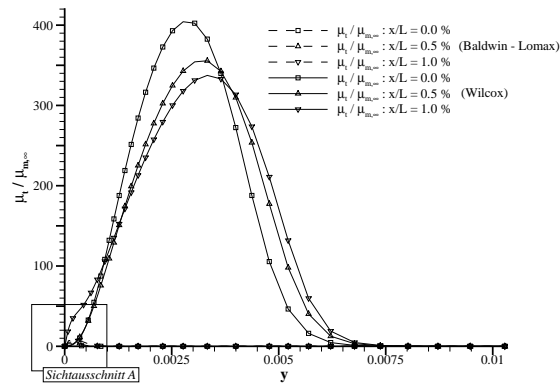
**Abb. 7.10.** Geschwindigkeitsvektoren und turbulente Wirbelviskosität der turbulenten Plattengrenzschicht bei Simulation mit dem Baldwin-Lomax-Modell



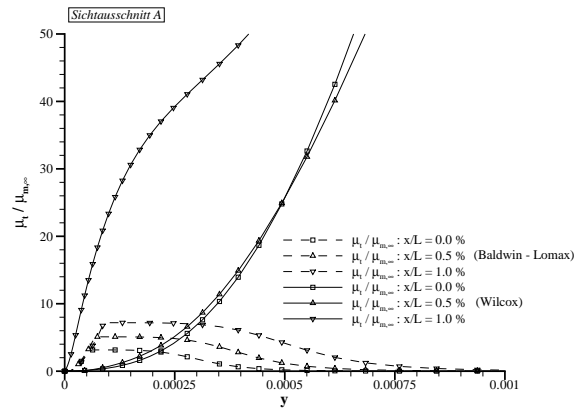
**Abb. 7.11.** Geschwindigkeitsvektoren und turbulente Wirbelviskosität der turbulenten Plattengrenzschicht bei Simulation mit dem Wilcox-Modell

zu ersehen. Der Reibungsbeiwert für diese Einstellung des Turbulenzgrades zeigt sogar ein annähernd laminares Lösungsverhalten. Auswirkungen auf den Reibungsbeiwert zeigen sich erwartungsgemäß nur im turbulenten Strömungsbereich. Der Einfluss des Turbulenzgrades auf den Reibungsbeiwert ist im Bereich von  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-3}$  bis  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-5}$  von nicht signifikantem Ausmaß.

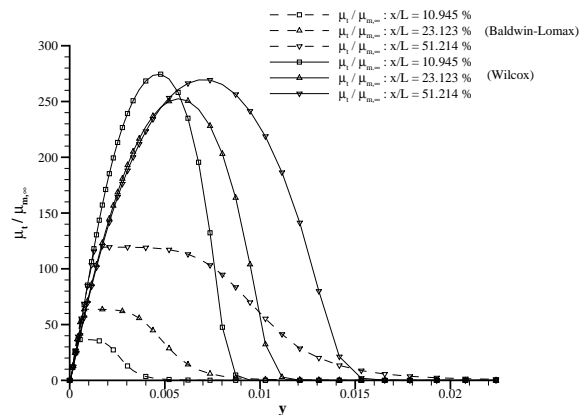
Betrachtet man den Verlauf des Turbulenzgrades in Hauptströmungsrichtung entlang des Symmetrierandes, so ist zu ersehen, dass der an der Plattenvorderkante ankommende Turbulenzgrad von gleicher Größenordnung ist. Der am Einströmungsrand eingestellte Turbulenzgrad wird in Hauptströmungsrichtung über wenige Netzzellen auf die gleiche Größenordnung abgebaut. Dies ist in Abb. 7.23 dargestellt. Die wandnormale Änderung des Turbulenzgrades an einigen Schnitten entlang der Platte ist aus Abb. 7.22 ersichtlich. Das gänzlich veränderte Verhalten bei einem Turbulenzgrad



**Abb. 7.12.** Vergleich wandnormaler Profile der turbulenten Wirbelviskosität bei Baldwin-Lomax- und Wilcox-Turbulenzmodellierung im Bereich der Plattenvorderkante

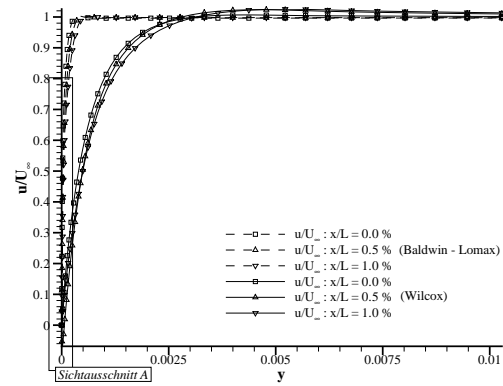


**Abb. 7.13.** Sichtausschnitt A der Abb. 7.12

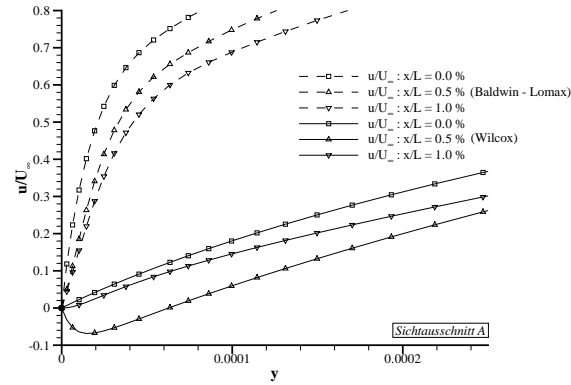


**Abb. 7.14.** Vergleich wandnormaler Profile der turbulenten Wirbelviskosität bei Baldwin-Lomax- und Wilcox-Turbulenzmodellierung entlang der Platte

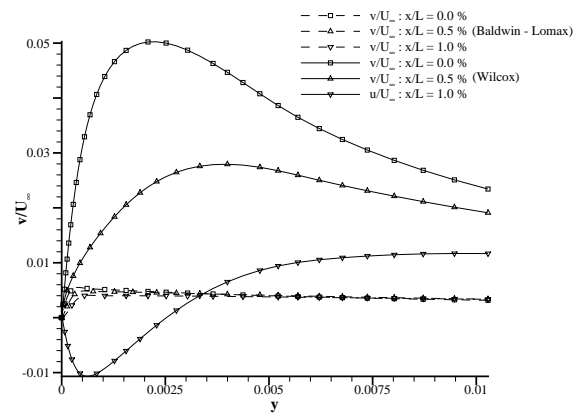




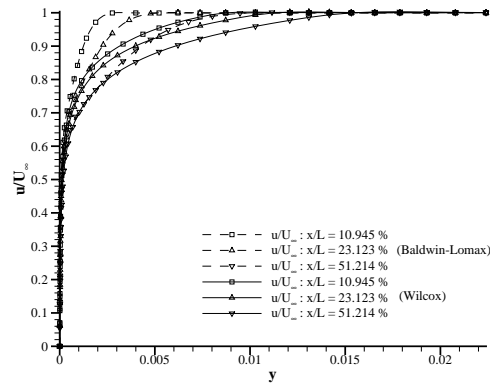
**Abb. 7.15.** Vergleich wandnormaler Profile der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung bei Baldwin-Lomax- und bei Wilcox-Turbulenzmodellierung im Bereich der Plattenvorderkante



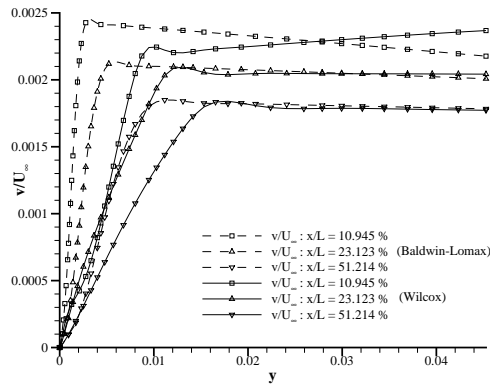
**Abb. 7.16.** Sichtausschnitt A der Abb. 7.15



**Abb. 7.17.** Vergleich wandnormaler Profile der Geschwindigkeitskomponente in wandnormaler Richtung bei Baldwin-Lomax- und bei Wilcox-Turbulenzmodellierung im Bereich der Plattenvorderkante



**Abb. 7.18.** Vergleich wandnormaler Profile der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung bei Baldwin-Lomax- und bei Wilcox-Turbulenzmodellierung entlang der Platte



**Abb. 7.19.** Vergleich wandnormaler Profile der Geschwindigkeitskomponente in wandnormaler Richtung bei Baldwin-Lomax- und bei Wilcox-Turbulenzmodellierung entlang der Platte

von  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-1}$  gegenüber den anderen Turbulenzgraden ist auch hier zu erkennen. Die Zahlenwerte an den Kurven stellen jeweils die  $i$ -Indizes der Schnitte  $x = \text{konst.}$  dar. Die Unterscheidung zwischen Quadrat und Dreieck dient lediglich der Unterscheidung zwischen dem Turbulenzgrad  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-1}$  und den übrigen Turbulenzgraden. Zusätzlich sind in den Abbildungen 7.24 bis 7.26 und 7.27 bis 7.29 die wandnormalen Profile der kartesischen Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung an Schnitten  $x = \text{konst.}$  entlang der Platte dargestellt. Die Abbildungen zeichnen lediglich die Geschwindigkeitsprofile für die Turbulenzgrade von  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-1}$  bis  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-3}$ , da sich in diesem Bereich die signifikantesten Änderungen im Reibungsbeiwert zeigten. In diesen Abbildungen ist auch das transitionelle Verhalten der Strömung in den Geschwindigkeitsprofilen zu sehen. Die Profile gehen von einem typisch laminaren zu einem turbulenten Geschwindigkeitsprofil über. Zusätzlich ist aus den Abbildungen 7.27 bis 7.29 an Hand des wandnormalen Verlaufs der Geschwindigkeitskomponente in  $y$ -Richtung die Verdrängungswirkung beider Grenzschichtformen ersichtlich.

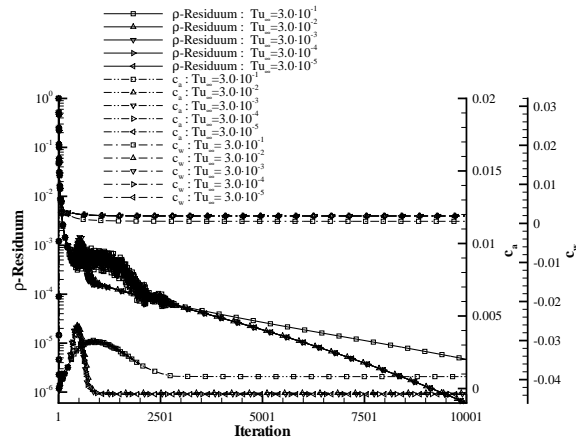


Abb. 7.20. Konvergenzverhalten der turbulenten Plattenströmung bei Variation des Turbulenzgrades am Einströmungsrand

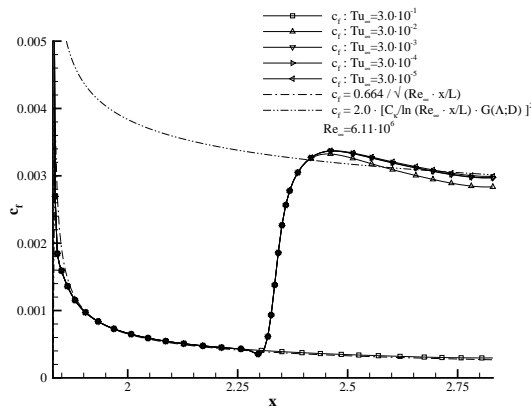
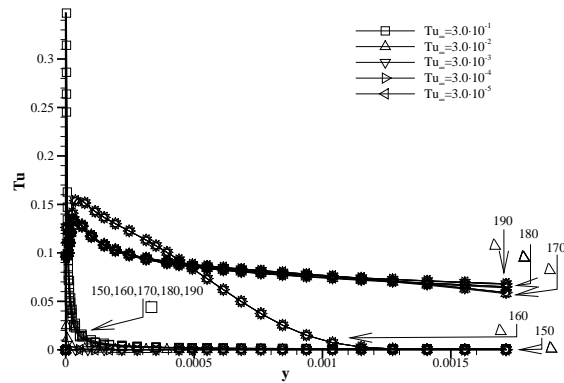


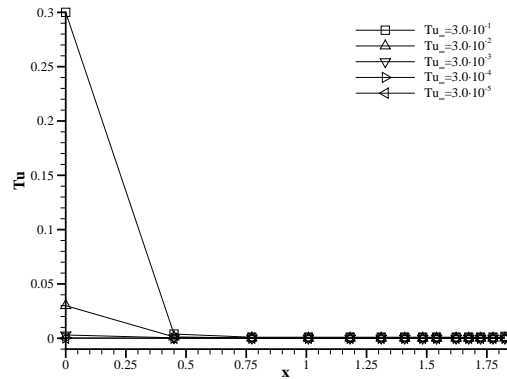
Abb. 7.21. Lokaler Reibungsbeiwert  $c_f$  der turbulenten Plattenströmung bei Variation des Turbulenzgrades am Einströmungsrand

### 7.1.2 Plattenströmung mit Transition

Die ersten Validierungsrechnungen der TT-Modellierung erfolgten für die Plattenströmung bei  $Re_\infty = 1.67 \cdot 10^6$  und  $Ma_\infty = 0.071$ . Die Rechnungen für diese Anströmungssituation wurden alle auf dem 40'er Netz durchgeführt. Die erste implementierte Programmversion nutzte nicht die Technik einer laminaren Domäne, die die Eigenschaft hat, auch stromauf des Plattenbeginns die Produktion von Turbulenz zu unterdrücken. Denn die laminaren Domänen gestalten sich in der Weise, dass alle Netzkunkte mit einem kleineren Abstand zum nächsten Konturnetzkpunkt, als dies durch den Parameter `DISLIM` angegeben wird, in laminarer Weise simuliert werden. In der bisherigen, implementierten Form ist unter laminarer Simulation eines Netzkunktes die Limitierung des Produktionsterms an kinetischer Turbulenzenergie auf das Maß des Dissipationsterms zu verstehen. Demnach kann bei laminarer Simulation eines Netzkunktes nur kinetische Turbulenzenergie für diesen einen Punkt vernichtet werden. Die zuerst implementierte Fassung der TT-Modellierung begrenzte die laminare Domäne auf die Grenzschicht. Die Eingabe des Parameters `DISLIM` bedarf einer vorherigen Kenntnis der sich einstellenden Grenzschichtdicke. Es erschien zunächst zweckmäßig die laminare Domäne ohne das benötigte Vorwissen des Benutzers jeweils auf die Grenzschichtdicke zu begrenzen. Dadurch war aber im Bereich



**Abb. 7.22.** Wandnormale Profile des Turbulenzgrades der turbulenten Plattenströmung bei Variation des Turbulenzgrades am Einströmungsrand



**Abb. 7.23.** Änderung des Turbulenzgrades in Hauptströmungsrichtung entlang des Symmetrierandes der turbulenten Plattenströmung bei Variation des Turbulenzgrades am Einströmungsrand

der Plattenvorderkante kein Stromaueinfluss der laminaren Behandlung von Netzpunkten gewährleistet. Dies führte zu Schwierigkeiten im Transitionsvorhersagemechanismus der TT-Modellierung. Daher hat man sich entschlossen in einer zweiten Fassung die Technik laminarer Domänen in der bereits implementierten Form auch für die TT-Modellierung zu nutzen. Die Erkenntnisse, die zu diesem Entschluss führten werden in diesem Abschnitt dokumentiert.

Die Verwendung der ersten Programmfassung der TT-Modellierung ergab stets eine vorhergesagte Lage des Transitionsbeginns kurz hinter der Stelle, an der bei der vollturbulenten Simulation mittels des Wilcox-Turbulenzmodells das Rückströmungsgebiet lag, obwohl für den eingestellten Anströmungszustand gemäß Experimenten keine Transition auf der Platte zu erwarten war. An diesem Zustand änderte sich auch nichts, wenn eine Anzahl an Netzpunkten, die der Einstellung des Parameters  $NSFTTTM$  entsprachen, bei der Auswertung des Transitionskriteriums ausgeklammert wurden. Der Transitionsbeginn wurde dabei stets an einem Netzpunkt nach dem Bereich ausgeklammerter Netzpunkte für die Auswertung des Transitionskriteriums ermittelt. Das Ausklammern der Netzpunkte stellte also keine Lösung des Problems dar. Die Konvergenz der Transitionslagenermittlung während des iterativen Lösungsprozesses in Prozent der Plattenlänge ist in Abb. 7.30 dargestellt. Zusätzlich ist

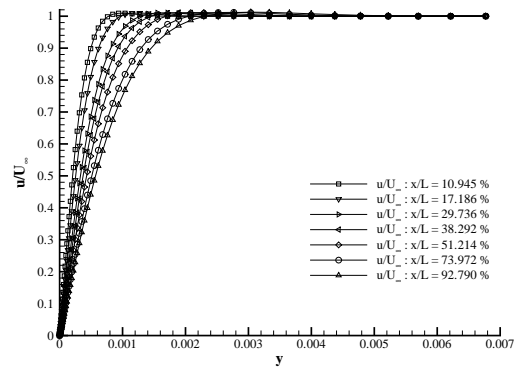


Abb. 7.24. Wandnormales Profil der Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung bei  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-1}$

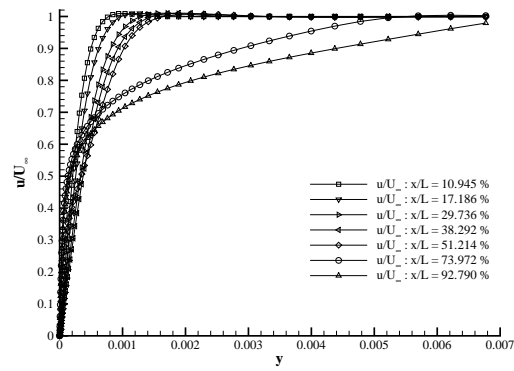


Abb. 7.25. ... bei  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-2}$

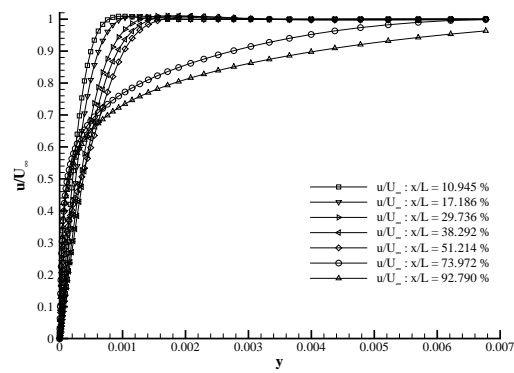


Abb. 7.26. ... bei  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-3}$

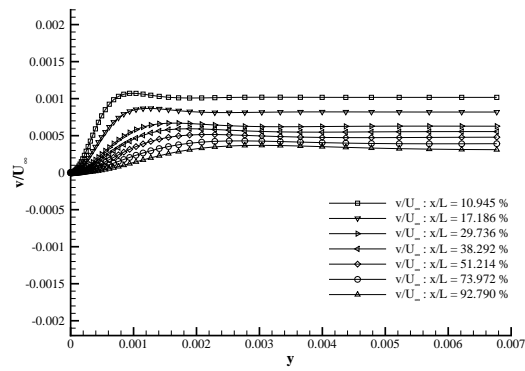


Abb. 7.27. Wandnormales Profil der Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung bei  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-1}$

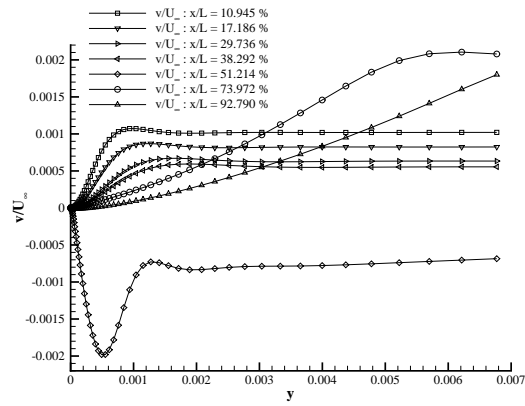


Abb. 7.28. ... bei  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-2}$

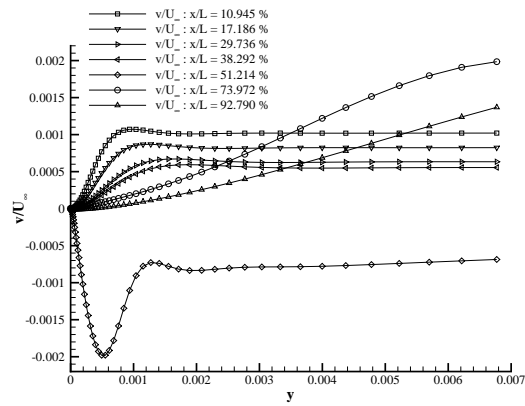


Abb. 7.29. ... bei  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-3}$

in dieser Abbildung die Konvergenz des simulierten Transitionsendes eingetragen. Die Werte für Transitionsbeginn und Transitionsende belaufen sich dabei auf  $x_t/L = 6.66\%$  und  $x_T/L = 17.68\%$ . Dieses

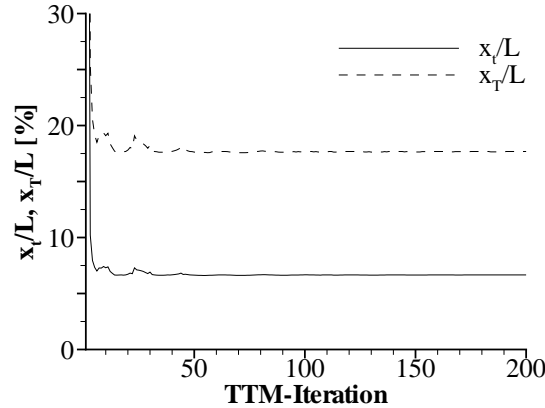


Abb. 7.30. Konvergenz der Transitionslage für die erste Programmversion der TT-Modellierung

Verhalten der Transitionsvorhersage führt zu der Ausbildung des Reibungsbeiwertes wie in Abb. 7.31. Dieser Abbildung sind an dezidierten Punkten des Verlaufs des Reibungsbeiwertes die korrespondierenden Geschwindigkeitsprofile der Komponente in x-Richtung hinzugefügt. Man erkennt im Verlauf des Reibungsbeiwertes das weiterhin bestehende Rückströmungsgebiet an den negativen Reibungsbeiwerten im Bereich der Plattenvorderkante. Die Auswirkungen dieses Rückströmungsgebiets scheinen sich auch auf Bereiche etwas weiter stromab auszuwirken, denn hier ist der Reibungsbeiwert signifikant niedriger gegenüber der Blasius'schen Vergleichslösung.

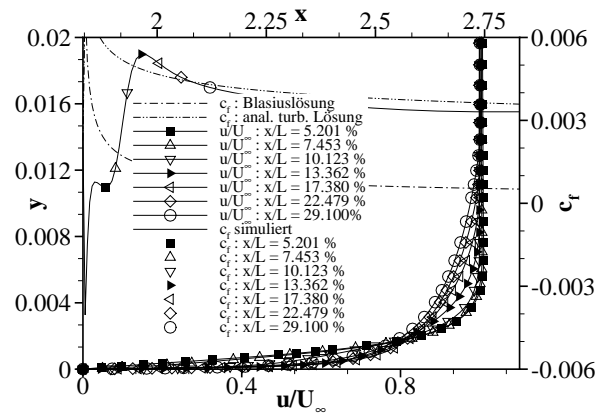
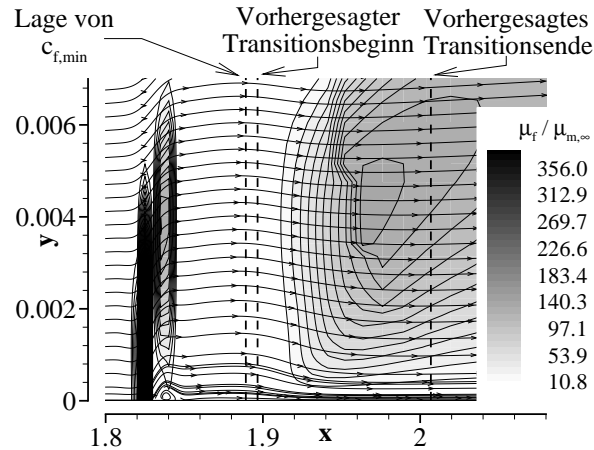
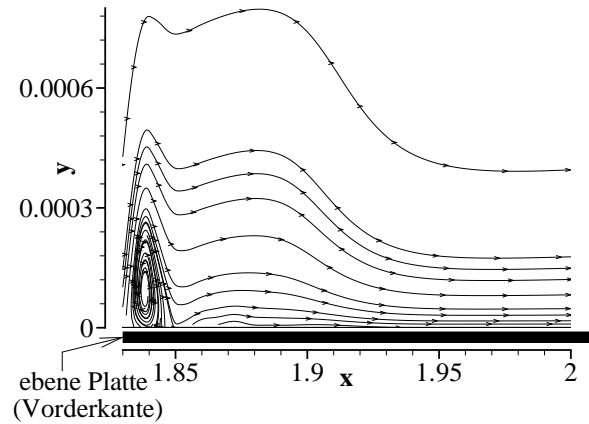


Abb. 7.31. Lokalen Reibungsbeiwerte und ausgewählte  $u$ -Geschwindigkeitsprofile für die erste Programmversion der TT-Modellierung

Die Ausbildung der Fluktuationsviskosität im Bereich der Plattenvorderkante ist Abb. 7.32 entnehmbar. Zusätzlich sind neben der Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität Stromlinien, sowie Linien  $x = \text{konst.}$  für charakteristische Transitionspunkte eingezeichnet. Der vergrößerte Sichtausschnitt der Stromlinieninformation im Bereich der Plattenvorderkante zeigt den sich ausbil-



**Abb. 7.32.** Konturdarstellung der Fluktuationsviskosität im Bereich der Plattenvorderkante für die erste Programmversion der TT-Modellierung

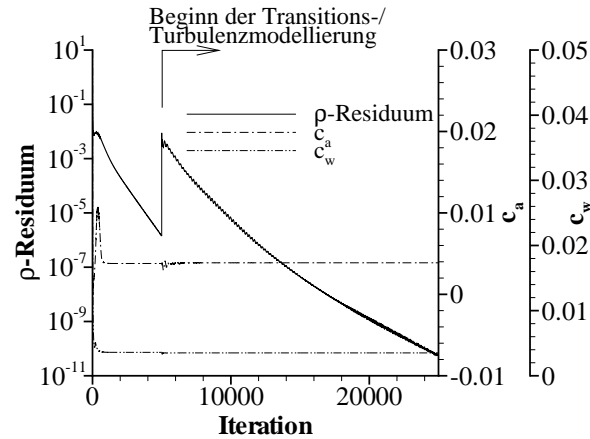


**Abb. 7.33.** Stromliniendarstellung eines Sichtausschnitts der Abb. 7.32 sehr nah im Bereich der Vorderkante

denden Wirbel, der aus dem verbleibenden Rückströmungsgebiet bei vollturbulenter Simulation hervorgeht. Die Konturdarstellung der insgesamt auf Strömungsfluktuationen zurückgehenden Viskosität zeigt, dass das Verfahren fähig war, im Bereich stromauf des detektierten Transitionsbeginns die Fluktuationsviskosität im Vergleich mit der vollturbulenten Simulation zu mindern. Durch den nicht vorhandenen Stromaueinfluss bezüglich der laminaren Simulationsbehandlung von Netzpunkten bleibt die Überproduktion an Fluktuationsviskosität vor der Plattenvorderkante bestehen. Zusätzlich verbleibt ein Gebiet hoher Fluktuationsviskosität im Bereich des Wirbels, obwohl dieser Bereich eigentlich selbst in den Bereich der laminaren Domäne fällt, die durch die Grenzschicht begrenzt wird. Der Wirbel führt aber dazu, dass die zur Grenzschichtickenbestimmung eingesetzte Diagnosefunktion an dieser Stelle eine Grenzschichtdicke ermittelt, die der Entfernung des Wirbelkerns zur Plattenoberfläche entspricht. Dadurch werden Netzpunkte für diesen Schnitt  $x = \text{konst.}$  mit einem größeren Abstand zur Plattenoberfläche als die Grenzschichtdicke vollturbulent behandelt. Die Konvektion des sich vor der Plattenvorderkante befindenden Gebiets hoher Fluktuationsviskosität führt dazu, dass sich allein für den Schnitt des Wirbels auch hier ein Gebiet hoher Fluktuationsviskosität ausbildet. Ab-



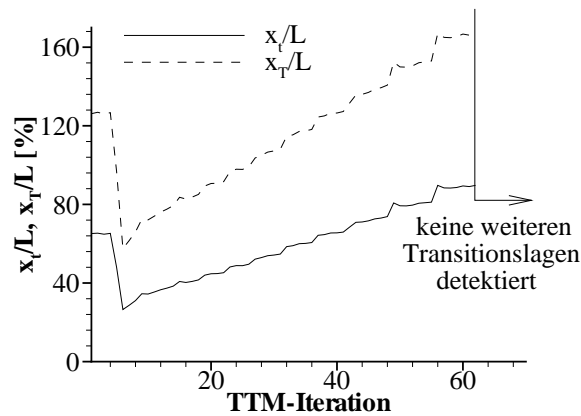
schließlich ist in Abb. 7.34 das Konvergenzverhalten der gesamten Strömungssimulation dargestellt.



**Abb. 7.34.** Konvergenzverhalten der Strömung bei Verwendung der ersten Programmversion der TT-Modellierung

Eine Maßnahme, um den Einfluss des Gebiets hoher Fluktuationsviskosität auf die Transitionsvorhersage zu untersuchen, war den laminar/turbulenten Status der Netzknoten mit einer  $x$ -Koordinate  $x < 1.84546$  im gesamten Gebiet auf null zu setzen, diese Punkte also gänzlich laminar zu simulieren. Die Ergebnisse dazu, sind nachfolgend dokumentiert.

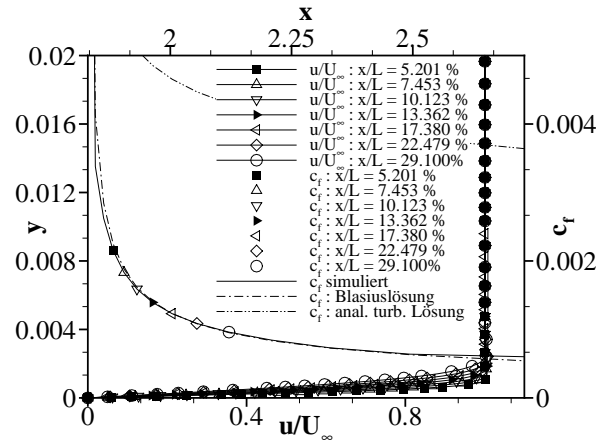
Der zuvor genannte Eingriff führte zu dem Konvergenzverhalten der Transitionsvorhersage der Abb. 7.35. Die Aussage *keine weiteren Transitionslagen detektiert* meint hier, dass in dieser Pro-



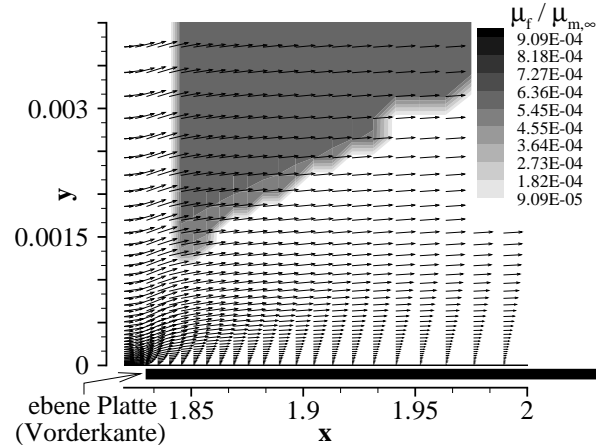
**Abb. 7.35.** Konvergenzverhalten der Transitionslage bei Verwendung der Bedingung  $\mathcal{P}_{i,j,k}^{l,t} = 0$ , wenn  $x_{i,j,k} < 1.84546$ , bei der ersten Programmversion der TT-Modellierung

grammversion nicht implementiert war, dass bei nicht Detektieren einer Transition die Transitionslage automatisch auf die Hinterkante gesetzt wurde. Es wurde also keine weitere Transitionslage mehr durch das Kriterium ermittelt und so verblieb die zuletzt ermittelte Transitionslage weiterhin bestehen. Daher ist diese Aussage in der Weise zu werten, dass die erwartete Lösung, nämlich keine Transition

entlang der Platte, unter der Bedingung der getätigten Modifikation an der ersten Programmversion mittels TT-Modellierung zu erzielen ist. Der Reibungsbeiwert dieser Lösung ist in Abb. 7.36 dargestellt. Die Blasius-Lösung wird bis auf einen Bereich nahe der Plattenvorderkante und der Hinterkante gut angenähert. Die Ursache des Unterschieds im Bereich der Plattenvorderkante konnte nicht geklärt werden, während die leichte Zunahme des Reibungsbeiwertes auf den bestehenden Transitionsbeginn an dieser Stelle zurückzuführen ist (vgl. Abb. 7.35). Die Ausbildung der Fluktuationsviskosität ist



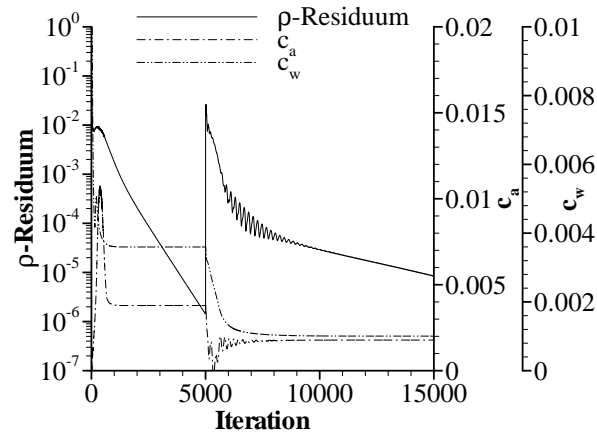
**Abb. 7.36.** Lokaler Reibungsbeiwert und ausgewählte  $u$ -Geschwindigkeitsprofile bei Verwendung der Bedingung  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} = 0$ , wenn  $x_{i,j,k} < 1.84546$ , bei der ersten Programmversion der TT-Modellierung



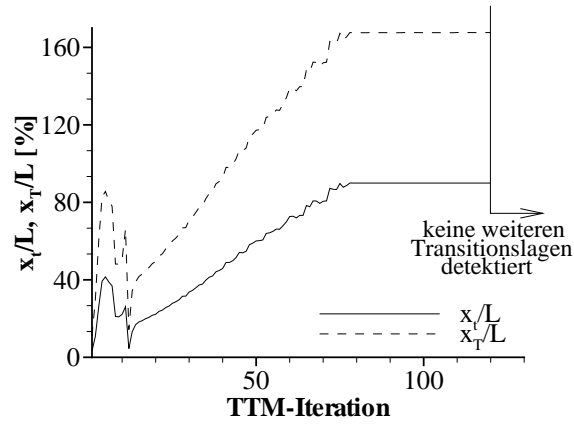
**Abb. 7.37.** Geschwindigkeitsvektoren und Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität bei Verwendung der Bedingung  $\mathcal{F}_{i,j,k}^{l,t} = 0$ , wenn  $x_{i,j,k} < 1.84546$ , bei der ersten Programmversion der TT-Modellierung

in Abb. 7.37 dargestellt. Der Wirbel, wie auch die Gebiete hoher Fluktuationsviskosität, sind nicht mehr existent. Die Geschwindigkeitsvektoren zeigen die laminaren Geschwindigkeitsprofile auf. Das Konvergenzverhalten der Strömungssimulation im Ganzen ist in Abb. 7.38 dargestellt.

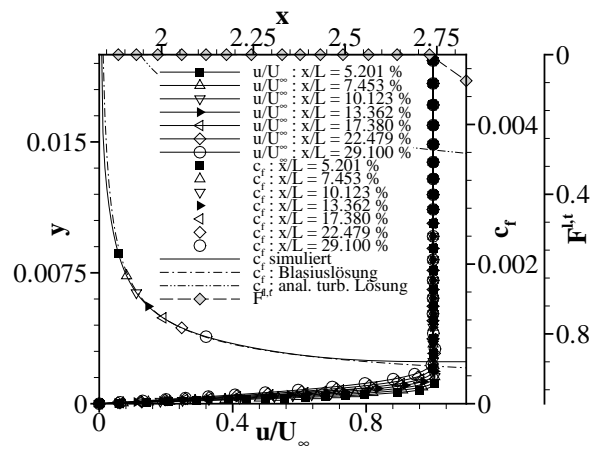
Da die Art der Modifikation unbefriedigend ist, wurde die Implementierung in soweit abgeändert, dass die bereits implementierte Methode laminarer Domänen (Parameter `TRANS=2`) im Rahmen der TT-Modellierung verwendet wurde. Die Ergebnisse dazu für denselben Anströmungsfall wie zuvor sind in den Abbildungen 7.39 bis 7.44 dokumentiert.



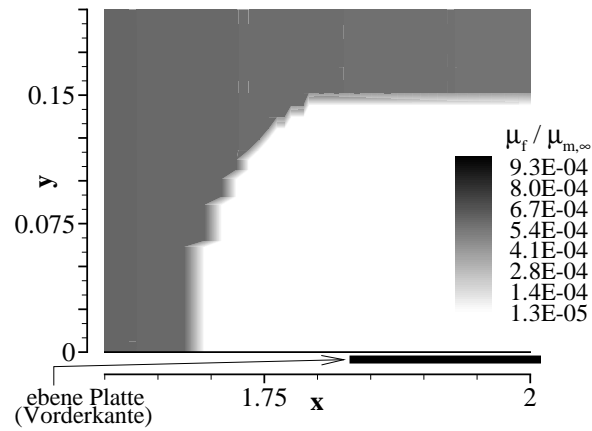
**Abb. 7.38.** Konvergenzverhalten der Strömung bei Verwendung der Bedingung  $\mathcal{P}_{i,j,k}^{1,t} = 0$ , wenn  $x_{i,j,k} < 1.84546$ , bei der ersten Programmversion der TT-Modellierung



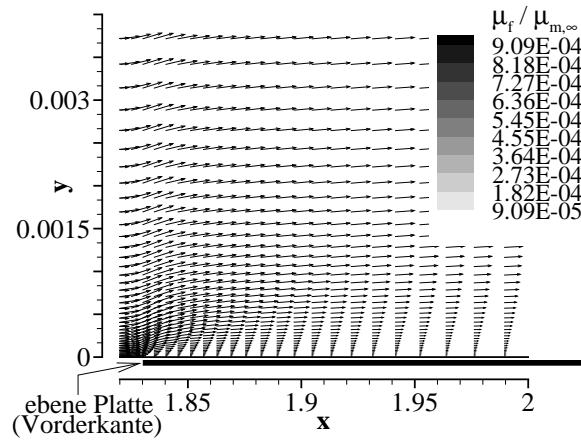
**Abb. 7.39.** Konvergenz der Transitionslage für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung



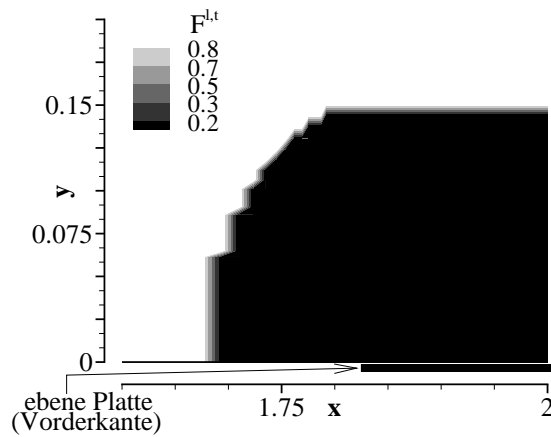
**Abb. 7.40.** Lokale Reibungsbeiwerte und ausgewählte  $u$ -Geschwindigkeitsprofile für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung



**Abb. 7.41.** Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung



**Abb. 7.42.** Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität und Geschwindigkeitsvektoren für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung



**Abb. 7.43.** Konturdarstellung des laminar/turbulenten Statusfeldes  $\mathcal{F}^{l,t}$  für die endgültige Fassung der TT-Modellierung

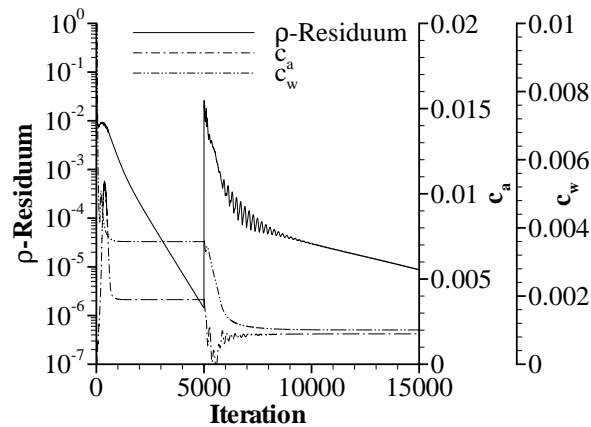


Abb. 7.44. Konvergenzverhalten der Strömungssimulation für die endgültige Fassung der TT-Modellierung

Diese Untersuchungen wurden zudem für den Strömungsfall  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.071$  durchgeführt. Für diesen Strömungsfall ist gemäß dem Experiment eine Lage des Transitionsbeginns bei etwa der Hälfte der Plattenlänge zu erwarten. Die Rechnungen für diesen Fall wurden ebenfalls auf dem 40'er Netz durchgeführt. Dieser Strömungsfall wurde nur mit der modifizierten ersten Programmversion und der endgültigen Programmversion durchgeführt.

Entsprechend den vorangegangenen Darstellungsformen wird die Simulationslösung der modifizierten ersten Programmversion für den genannten Strömungsfall in den Abbildungen 7.45 bis 7.49 dargestellt. Die Abb. 7.45 dokumentiert das Konvergenzverhalten der Transitionslage, die in regel-

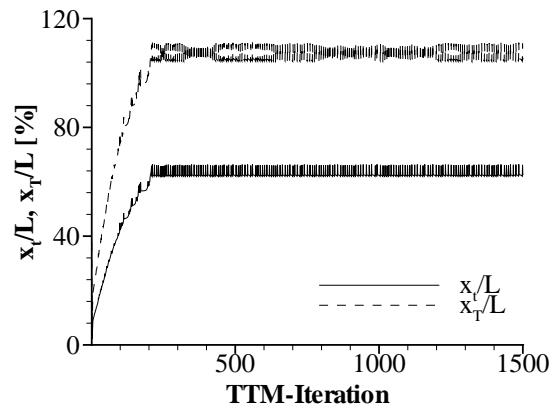
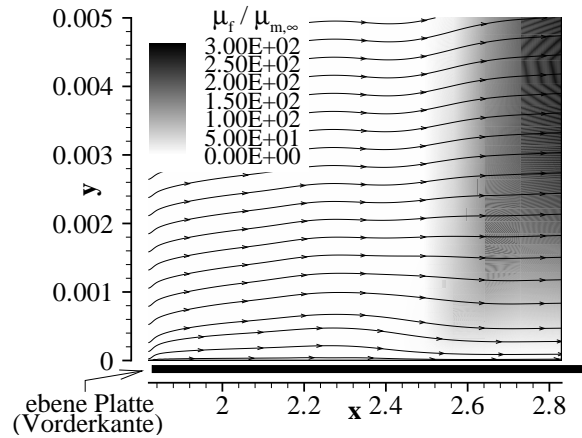
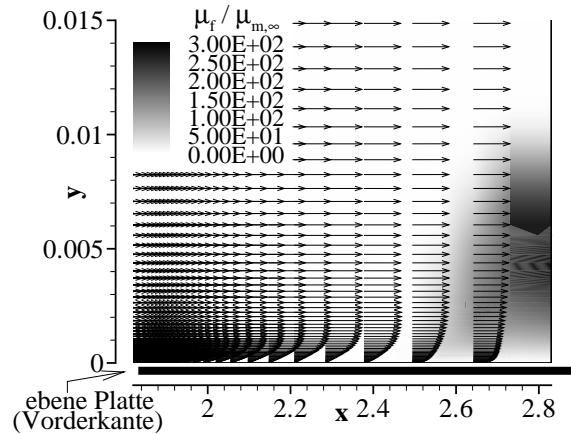


Abb. 7.45. Konvergenz der Transitionslage für die modifizierte erste Programmversion der TT-Modellierung

mäßiger Form um eine Transitionslage schwingt. Diese regelmäßige Schwingung des detektierten Transitionsbeginns bewegt sich im Bereich zwischen 62.03% und 66.42% der Plattenlänge. Diese regelmäßige Schwankung spiegelt sich selbstverständlich auch im Konvergenzverhalten der gesamten Strömungssimulation (vgl. Abb. 7.49) wieder. Der Übergang der laminaren in die turbulente Strömungsform ist sehr gut an der Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren entlang der Platte zu erkennen. Eindeutig ist in Abb. 7.47 die verstärkte Völligkeit des turbulenten Geschwindigkeitsprofils



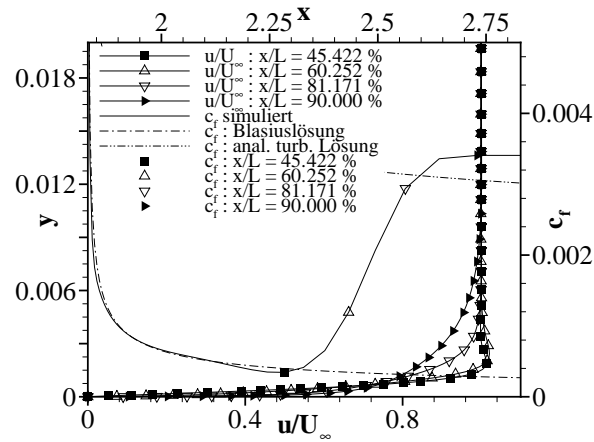
**Abb. 7.46.** Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität für die modifizierte erste Programmversion der TT-Modellierung



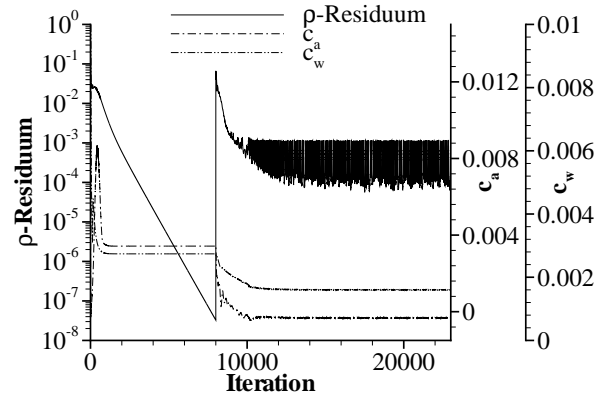
**Abb. 7.47.** Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität und Geschwindigkeitsvektoren für die modifizierte erste Programmversion der TT-Modellierung

und der damit verbundene erhöhte Wandgradient zu sehen. Der Übergang in die völlige Geschwindigkeitsform erklärt auch den in Abb. 7.46 zu beobachtenden Verlauf der Stromlinien. Die laminare Grenzschicht bewirkt zunächst die Verdrängungswirkung, die zu Beginn der Transition aus Kontinuitätsgründen zunächst zu einer Aufweitung der Stromlinien führt, bevor der starke Anstieg der turbulenten Grenzschichtdicke wiederum eine erhebliche Verdrängung hervorruft. Das laminar simulierte, wandnormale Geschwindigkeitsprofil weist zudem abweichend vom turbulenten Geschwindigkeitsprofil ein Überschwingen des Geschwindigkeitswerts am Grenzschichtrand auf. Dieses ist sehr wohl auch in Abb. 7.48 zu sehen. Zusätzlich ist der Verlauf des Reibungsbeiwertes in dieser Abbildung dargestellt. Ansatzweise ist das lokale Minimum des Reibungsbeiwertes zum Beginn der Transition erkennbar.

Die Lösungsergebnisse für die endgültige Programmversion sind in den Abbildungen 7.50 bis 7.54 dargestellt. Die Verwendung der Technik laminarer Domänen (TRANS=2) ermöglicht auch die Darstellung des laminar/turbulenten Statusfeldes  $\mathcal{F}^{l,t}$ . Es ist wiederum festzustellen, dass die Ergebnisse für die endgültige Programmversion keine qualitativen Abweichungen von den Ergebnissen der modifi-

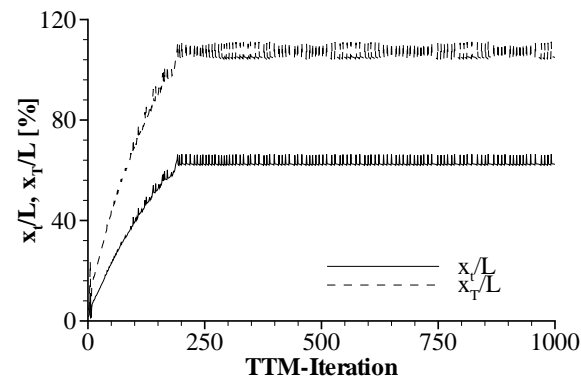


**Abb. 7.48.** Lokale Reibungsbeiwerte und ausgewählte  $u$ -Geschwindigkeitsprofile für die modifizierte erste Programmversion der TT-Modellierung

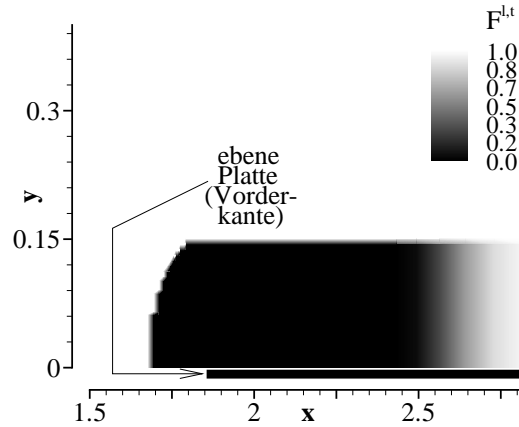


**Abb. 7.49.** Konvergenzverhalten der Strömungssimulation für die modifizierte erste Fassung der TT-Modellierung

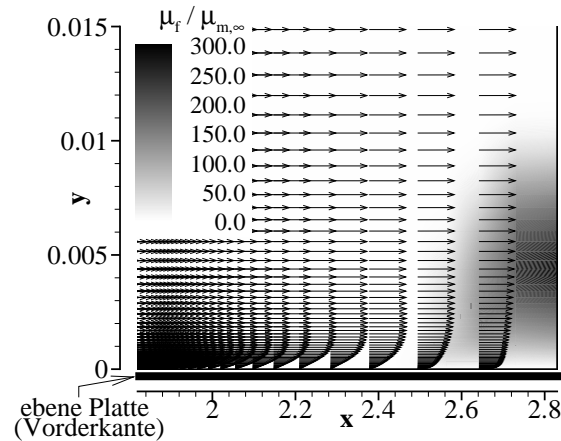
zierten ersten Programmversion aufweisen. Um das Konvergenzverhalten der Strömungslösung zu



**Abb. 7.50.** Konvergenz der Transitionslage für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung



**Abb. 7.51.** Darstellung des laminar/turbulenten Statusfeldes  $\mathcal{F}^{l,t}$  für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung

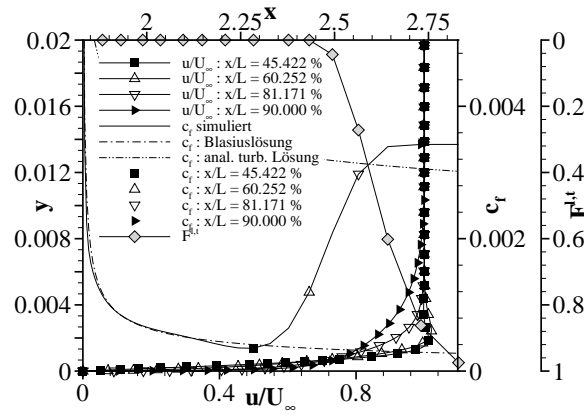


**Abb. 7.52.** Konturdarstellung der skalierten Fluktuationsviskosität für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung

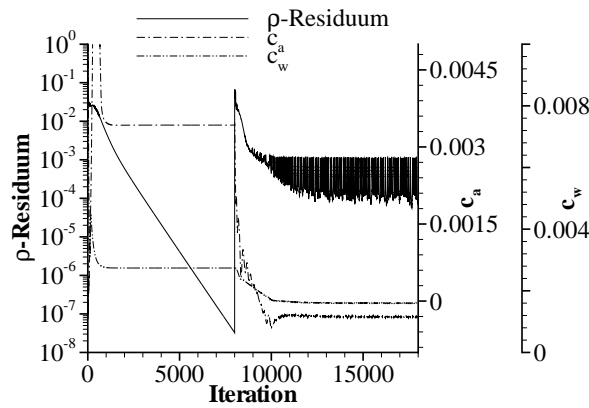
verbessern, wurden die aktuell ermittelten Transitionslagen ab einer bestimmten Anzahl an Iterationen auf der feinsten Netzebene (Parameter `NAVGTSLD`) mit einer bestimmten Anzahl an zuvor ermittelten Transitionslagen (`NAVGN`) arithmetisch gemittelt. Die Auswirkung auf die Konvergenz der Transitionslagen zeigt Abb. 7.55, während das resultierende Konvergenzverhalten der gesamten Strömungslösung in Abb. 7.56 gezeigt wird.

Die zuvor dokumentierten Ergebnisse wurden für die TT-modellspezifischen Parametereinstellungen aus Tab. 7.1 unter Verwendung vollturbulenter *restart*-Lösungen gewonnen. Es ergab sich bei weiteren Rechnungen eine ungeklärte Lösungsabhängigkeit vom Parameter `NTTMDLT`. Dieses Verhalten wird mittels der Abb. 7.57 dokumentiert. Zusätzlich konnte ein Einfluss der künstlichen Dissipation auf Basis zweiter Differenzen festgestellt werden. Diese künstliche Dissipation ist für den Fall  $k^{(2)} = 1 \cdot 10^{-5}$  nahezu deaktiviert. Die Abb. 7.57 dokumentiert, dass bei Erhöhung des Parameters `NTTMDLT` die detektierte Transitionslage stufenweise stromab wandert, bis schließlich für einen Wert  $\text{NTTMDLT} \approx 20$  keine Transitionslage auf der Platte mehr ermittelt werden kann. Für die Einstellungen





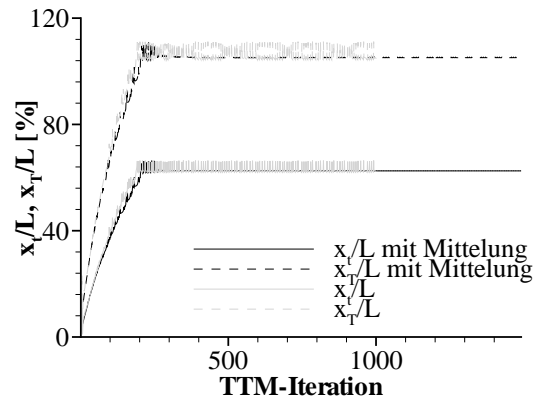
**Abb. 7.53.** Lokale Reibungsbeiwerte und ausgewählte  $u$ -Geschwindigkeitsprofile für die endgültige Programmversion der TT-Modellierung



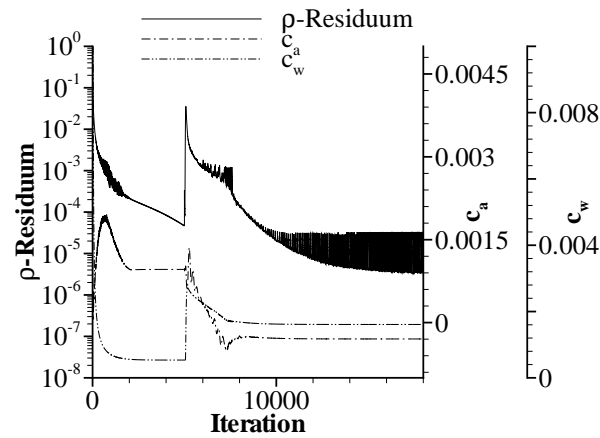
**Abb. 7.54.** Konvergenzverhalten der Strömungssimulation für die endgültige Fassung der TT-Modellierung

$\text{NTTMDLT} < 20$  liegt die ermittelte Transitionslage im Rahmen der räumlichen Diskretisierung in der Nähe der experimentellen und durch Hassan und Warren TT-modellierten Transitionslage. Da eine Abhängigkeit der Lösung von der dem Verfahren künstlich hinzugefügten Dissipation auf der Basis zweiter Differenzen festgestellt wurde, wurde zusätzlich die Lösungsabhängigkeit von der künstlich hinzugefügten Dissipation auf der Basis vierter Differenzen untersucht. Die Auswirkungen auf den lokalen Reibungsbeiwert sind in Abb. 7.58 sowie den zusätzlichen Sichausschnitten dargestellt. Ab  $k^{(4)} < 1/2048$  sind verstärkt Oszillationen der Lösungskurve zu verzeichnen. Die Neigung zum Überschwingen der vollturbulenten Vergleichslösung im Bereich des lokalen Maximums des Reibungsbeiwertes nimmt für sinkende Werte  $k^{(4)}$  zu. Das lokale Minimum des Reibungsbeiwertes wandert etwas stromab für sinkende Werte  $k^{(4)}$ . Die Lösungen für die Variation von  $k^{(4)}$ , die zu den Abbildungen 7.58 sowie den zusätzlichen Sichausschnitten führte, sind alle bei TT-Modellierung mit aktivierter Transitionsvorhersage erzielt worden.

An dieser Stelle ist unbedingt festzuhalten, dass die Ergebnisse für die Reynolds-Zahl  $\text{Re}_\infty = 6.11 \cdot 10^6$  auf dem 40'er Netz erzielt wurden, welches in der wandnormalen Diskretisierung für die Reynolds-Zahl  $\text{Re}_\infty = 1.67 \cdot 10^6$  optimiert wurde. Der Abstand der ersten Netzlinie ist demnach der Art, dass  $y^+ > 1$  gilt. In Abb. 7.62 ist der Strömungsfall, der zu den vorigen Ergebnissen führte, mit den Strömungsfällen verglichen, bei denen der Wert von  $y^+$  des Netzes jeweils der Reynolds-Zahl der



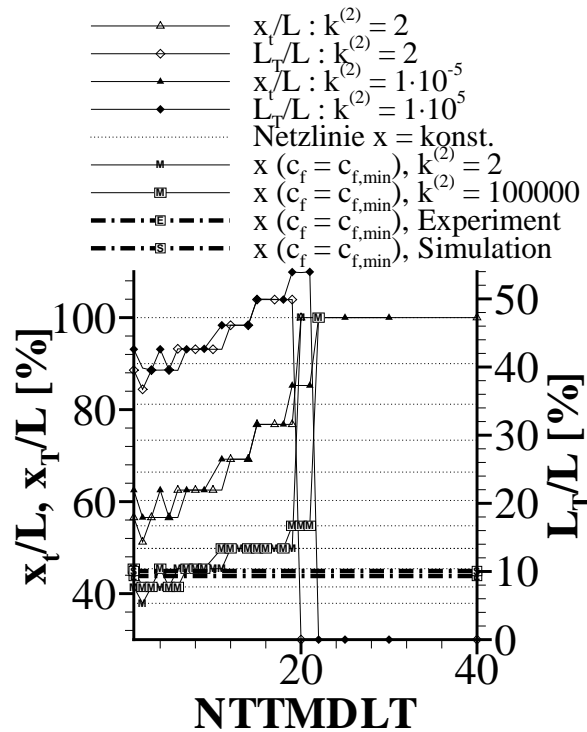
**Abb. 7.55.** Transitionslagenkonvergenz mit Mittelung im Vergleich mit der Transitionslagenkonvergenz ohne Mittelung für die endgültige Programmversion



**Abb. 7.56.** Konvergenz der gesamten Strömungslösung bei arithmetischer Mittelung der detektierten Transitionslage

Parameter	Einstellung
TRANS	0 erste und modifizierte erste Programmversion
	2 endgültige Programmversion
I TRTUMD	1
NTTMSTRT	100
NTTMDLT	1
NSFTTTM	3
RTTMTU0	0.0003
DACTKPL	1
TU0	0.0003

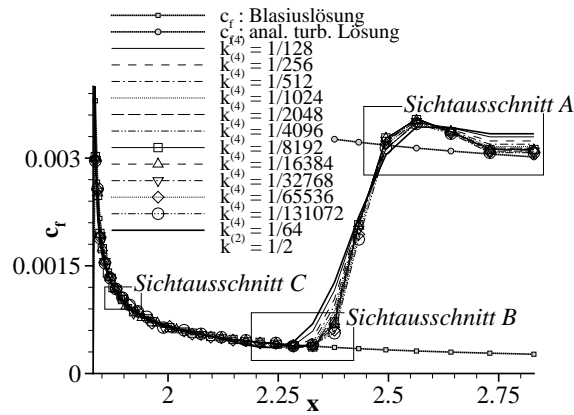
**Tab. 7.1.** TT-modellspezifische Parametereinstellungen für die Lösungsvergleiche der Programmversionen bei  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.071$



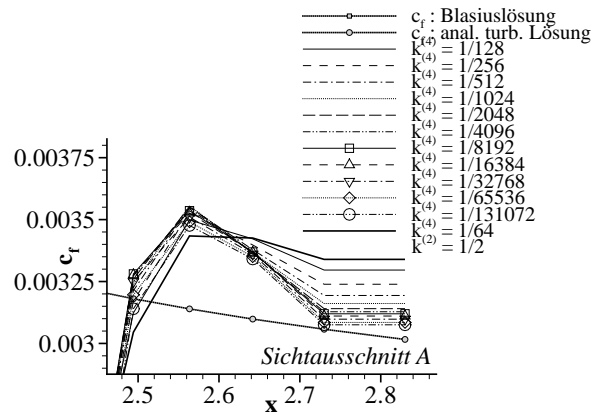
**Abb. 7.57.** Auswirkungen der Variation des Parameters NTTMDLT auf die detektierte Transitionslage bei Simulation mit der endgültigen Programmversion auf dem 40'er Netz

Anströmung angepasst ist. Die Lage des Transitionsbeginns ist bei dieser Lösung bei 50.75% der Plattenlänge fixiert. Da sich der Einfluss dieser Unzulänglichkeit im Nachhinein nicht als entscheidender Einfluss auf den Transitionsvorhersageprozess darstellte, auch wenn ein Einfluss zu verzeichnen ist, sind die vorangegangenen Ergebnisse hier dennoch dokumentiert worden.

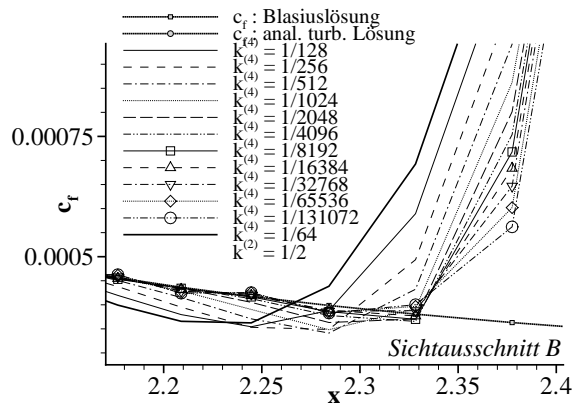
Die vorangegangenen Untersuchungen für das 40'er Netz zeigen zudem eine unzureichende räumliche Diskretisierung in Hauptströmungsrichtung auf. Der Verlauf des lokalen Reibungsbeiwertes wird nicht adäquat glatt aufgelöst. Daher wird anschließend der Einfluss einer Netzverfeinerung in Hauptströmungsrichtung untersucht. Der Einfluss auf die Transitionsmodellierung bei Variation des Abstandes der ersten wandnormalen Netzlinie, sowie der Netze mit verfeinerter Auflösung in Hauptströmungsrichtung, ist bei fixiertem Transitionsbeginn bei 50.75% der Plattenlänge untersucht worden. Der Anströmungszustand war  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.071$ . Die Ergebnisse dazu sind in Abb. 7.63, sowie den zugehörigen Sichtausschnitten dargestellt. Die zu den jeweiligen Simulationen gehörenden  $y^+$ -Verteilungen werden in Abb. 7.66 gezeigt. Die dargestellten Kurven mit Symbol sind die Lösungen bei korrespondierender Reynolds-Zahl mit dem  $y^+$ -Wert des jeweiligen Netzes. Der Einfluss von  $y^+$  zeigt sich im erhöhten Niveau des lokalen Reibungsbeiwertes im turbulenten Bereich. Der Einfluss der verfeinerten Netzauflösung in Hauptströmungsrichtung zeichnet sich durch das Stromabwandern des lokalen Minimums des Reibungsbeiwertes bei gleichzeitigem Steigen der Steigung des Reibungsbeiwertes im transitionellen Bereich aus. Der Darstellung wurde eine Verlaufskurve des Reibungsbeiwertes bei Simulation mit Transitionslänge beigelegt, um einen Eindruck des Unterschieds gegenüber Punkttransition zu vermitteln. Das sehr starke Überspringen gegenüber der Lösung mit Punkttransition ist möglicherweise auf die Einstellung DACTKPL=1 und KPRDLIM=1000 zurückzuführen, wodurch der Produktionsterm der kinetischen Turbulenzenergie anstatt in der Gr-



**Abb. 7.58.** Auswirkungen der Variation des Faktors  $k^{(4)}$  zur Steuerung der künstlich dem Verfahren hinzugefügten Dissipation auf der Basis vierter Differenzen auf den lokalen Reibungsbeiwert



**Abb. 7.59.** Sichtausschnitt A aus Abb. 7.58



**Abb. 7.60.** Sichtausschnitt B aus Abb. 7.58

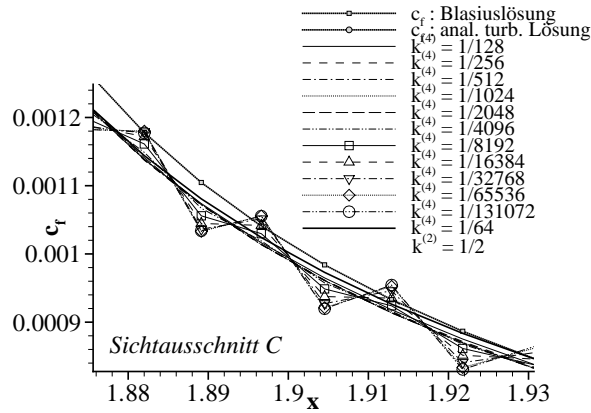
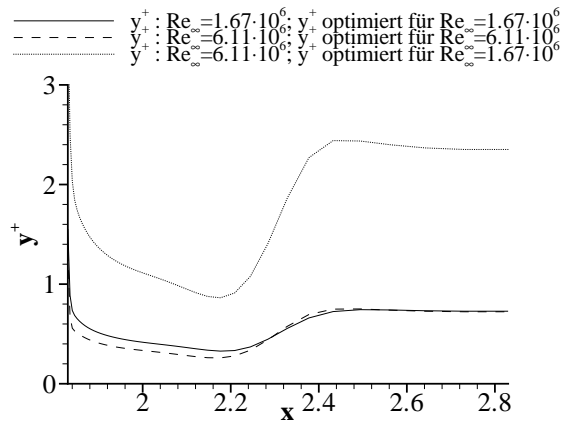
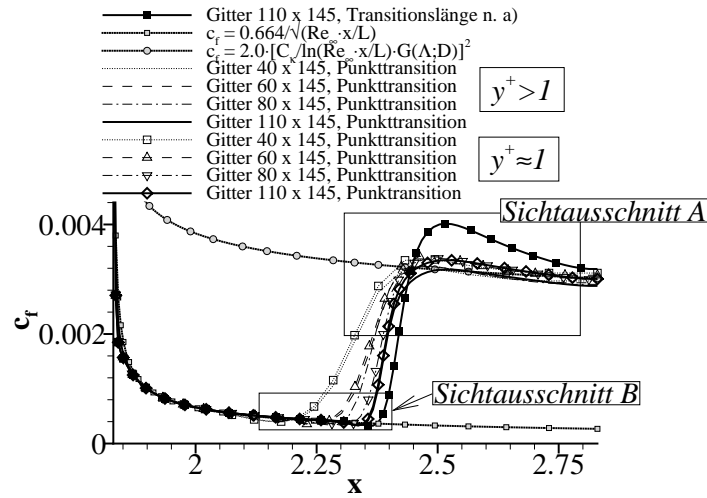


Abb. 7.61. Sichtausschnitt C aus Abb. 7.58

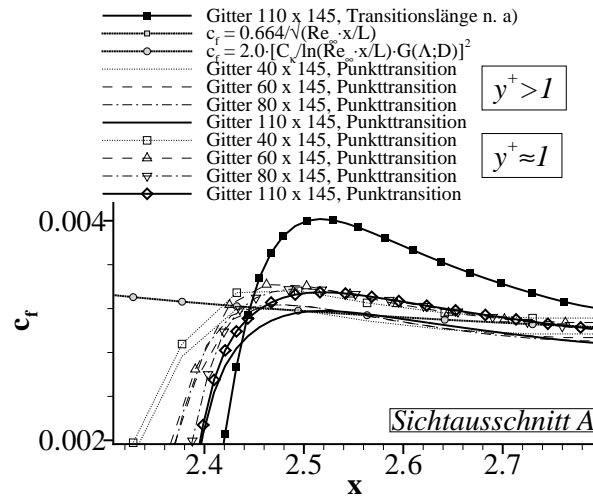
Abb. 7.62. Einfluss der Kombination aus Reynolds-Zahl und wandnormaler Netzauflösung auf den entdimensionierten Abstandsweite der ersten Netzlinie  $y^+$ 

undeinstellung auf das zehnfache des Dissipationsterms, auf das tausendfache beschränkt ist. Dies bedeutet, dass der Produktionsterm größere Werte annehmen kann als in der Grundeinstellung.

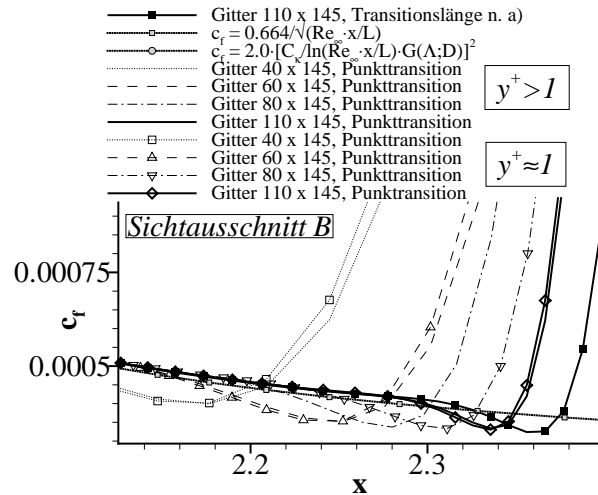
Bei Verwendung des adäquaten Abstandes der ersten wandnormalen Netzlinie korrespondierend zur Reynolds-Zahl der Anströmung verändert sich das Konvergenzverhalten des  $\rho$ -Residuums dahin, dass mehr Iterationsschritte für die Absenkung des Residuums auf dasselbe Niveau benötigt werden wie bei Verwendung eines hinsichtlich des  $y^+$ -Verlaufs für  $Re_\infty = 1.67 \cdot 10^6$  optimierten Netzes. Dieses Verhalten ist der Abb. 7.67 zu entnehmen. Zusätzlich sind in den Abbildungen 7.68 und 7.69 die Konvergenz des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes dargestellt. Der Vergleich der TT-Modellierung des lokalen Reibungsbeiwertes bei Punkttransition mit der bisherigen Methode bei Punkttransition ist in Abb. 7.70 dargestellt. Bei diesem Vergleich wurde das 110'er Netz verwendet. Während die transitionelle Form des Reibungsbeiwertes bei der bisherigen Methodik dadurch hervorgerufen wurde, dass die Limitierung des Produktionsterms kinetischer Turbulenzenergie nach (6.2) durch das laminar/turbulente Statusfeld gesteuert wurde, sinkt der Produktionsterm bei der TT-Modellierung natürlicherweise durch niedrige Fluktuationenwerte im Bereich laminarer Strömung ab. Das Ergebnis aus Abb. 7.70 zeigt, dass die TT-Modellierung in der Lage ist, ein numerisches motiviertes Verfahren zur Reduktion der Turbulenz in Bereichen laminarer Strömung adäquat zu ersetzen.



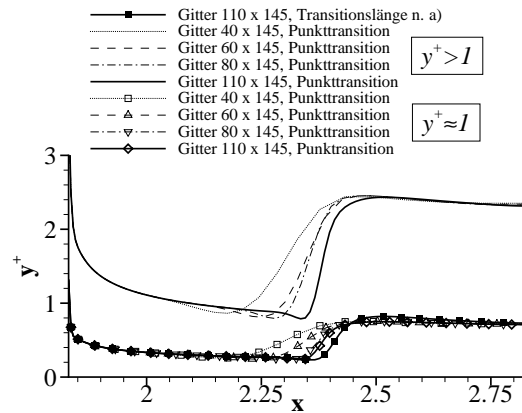
**Abb. 7.63.** Lokaler Reibungsbeiwert bei Variation der Netzauflösung in Hauptströmungsrichtung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall  $\text{Re}_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $\text{Ma}_\infty = 0.071$



**Abb. 7.64.** Sichtausschnitt A aus Abb. 7.63



**Abb. 7.65.** Sichtausschnitt B aus Abb. 7.63

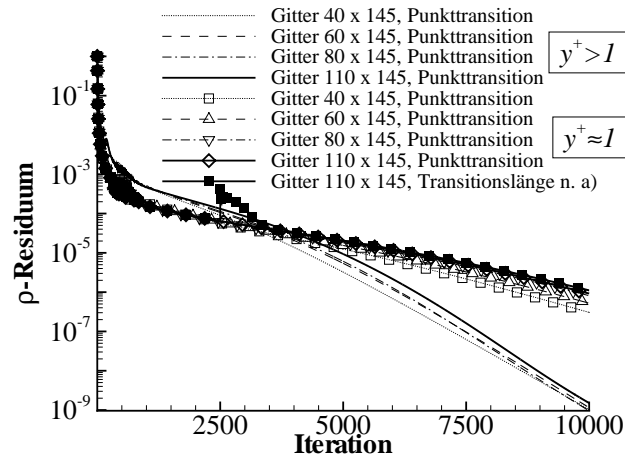


**Abb. 7.66.**  $y^+$  bei Variation der Netzaufösung in Hauptströmungsrichtung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.071$

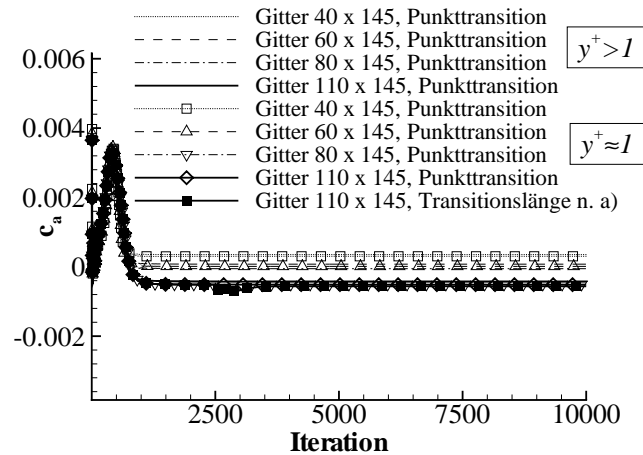
Der Einfluss der  $y^+$ -Variante auf den Vorhersageprozess der Transition im Rahmen der TT-Modellierung ist durch den Vergleich der Konvergenz der ermittelten Transitionslagen während des Lösungsprozesses aus Abb. 7.71 und 7.72 ersichtlich. Die Abb. 7.71 stellt dabei die Transitionslagenkonvergenz auf verschiedenen Netzen für eine  $y^+$ -Verteilung dar, die für eine Reynolds-Zahl der Anströmung von  $Re_\infty = 1.67 \cdot 10^6$  optimiert wurde. Die Abb. 7.72 hingegen dokumentiert die Konvergenz für die  $y^+$ -Verteilung, welche für eine Reynolds-Zahl der Anströmung von  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$  optimiert wurde. Im Rahmen beider Vorhersageprozesse der Transition wurde das transitionelle Gebiet mit der Transitionslängenformel  $Re_\lambda = 9.0 Re_{st}^{0.75}$  modelliert. Zu bemerken ist, dass sich lediglich für den Fall des 40'er Netzes bei Optimierung der  $y^+$ -Verteilung für  $Re_\infty = 1.67 \cdot 10^6$  bei Anströmung durch  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$  eine Transitionslage auf der Platte einstellt. Für alle übrigen Fälle stellt sich im Rahmen der TT-Modellierung eine gänzlich laminare Plattenströmung ein. Das oszillatorische Verhalten der Konvergenz der Transitionslage nimmt für sinkende Auflösungen des Integrationsgebiet in Hauptströmungsrichtung zu. Die Ursache des regelmäßigen, stufenförmigen und oszillatorischen Verhaltens der Transitionslagenbestimmung konnte nicht geklärt werden.

Da das TT-Modellierungsverfahren bei Netzverfeinerung in Hauptströmungsrichtung entgegen der Aussage des Experiments keine Transitionslage bei etwa der Hälfte der Plattenlänge detektiert, wurde dazu übergangen, die Implementierung zunächst auf Programmierfehler zu überprüfen. Dazu wurde versucht mit der TT-Modellierung eine vollständig laminare Lösung und eine vollständig turbulente, mit dem Wilcox-Modell simulierte Lösung, nachzubilden. Die Transitionslage wurde dabei jeweils fixiert gehalten. Die laminare Lösung wurde mittels der TT-modellierten Strömung durch Setzen der Transition ans Plattenende und Ausdehnung der laminaren Domäne von  $DISLIM=0.15$  simuliert, während für die turbulente Lösung der Transitionspunkt auf die Plattenvorderkante bei gleichzeitiger Ausdehnung der laminaren Domäne von  $DISLIM=0.01$  gesetzt wurde. Die beiden so entstandenen, fixierten laminaren Domänen sind in den Abb. 7.73 und 7.74 dargestellt.

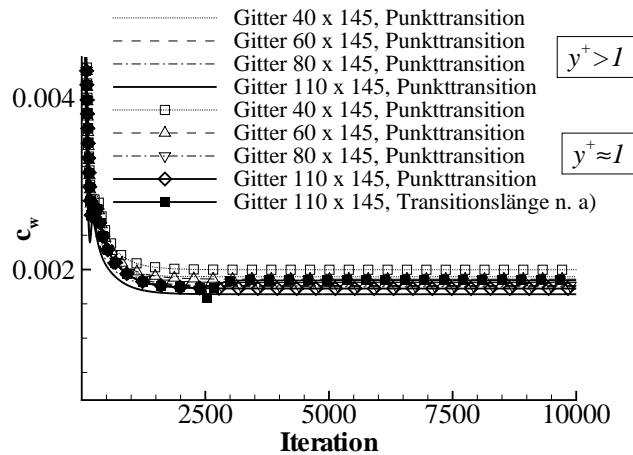
In den Abbildungen 7.75 bis 7.77 ist das wandnormale  $u$ -Geschwindigkeitsprofil, der Druck- und der Reibungsbeiwert der bisher verfügbaren transitionellen Modellierungsmethode, sowie der TT-Modellierung gegenüber der völlig laminar simulierten Lösung ( $ITURB=0$ ) verglichen. Die Größenordnung der Abweichung ist für beide transitionellen Modellierungsverfahren von gleicher Ordnung, so dass die Verfahren in der Modellierung als gleichwertig einzustufen sind. Die Abweichung insgesamt gegenüber der völlig laminar simulierten Lösung ist verschwindend gering.



**Abb. 7.67.**  $\rho$ -Residuenkonvergenz bei Variation der Netzauflösung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.071$

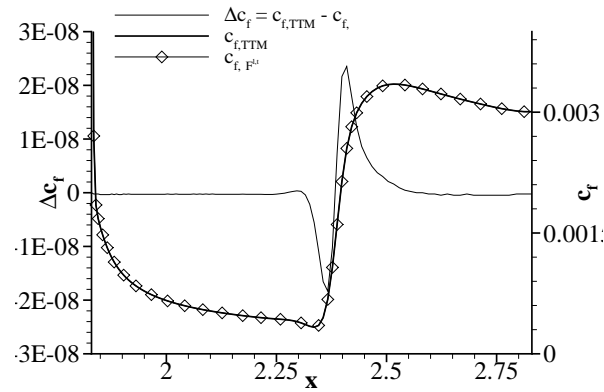


**Abb. 7.68.** Konvergenz des Auftriebsbeiwertes bei Variation der Netzauflösung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.071$

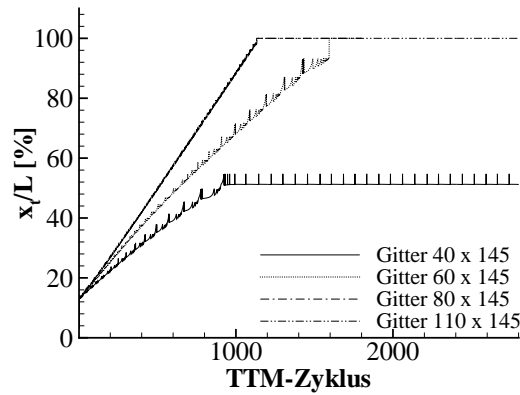


**Abb. 7.69.** Konvergenz des Widerstandsbeiwertes bei Variation der Netzauflösung und des Abstandes der ersten Netzlinie bei fixierter Transition bei 50.75% der Plattenlänge für den Anströmungsfall  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.071$

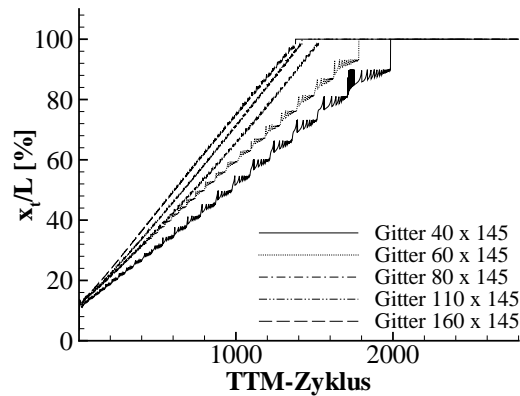




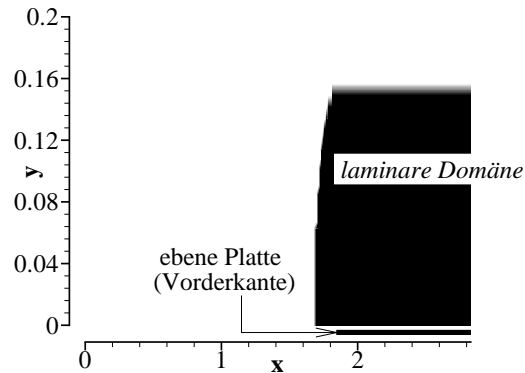
**Abb. 7.70.** Vergleich des lokalen Reibungsbeiwertes bei fixierter Transition ( $x_t/L = 50.75\%$ ) für die bisherig verfügbare Modellierungs- und die TT-Modellierungsmethodik



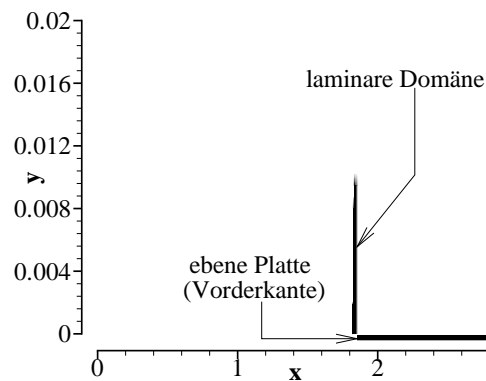
**Abb. 7.71.** Konvergenz der Transitionsvorhersage bei Variation der Auflösung des Netzes in Hauptströmungsrichtung bei einem  $y^+$ , welches für  $Re_\infty = 1.67 \cdot 10^6$  optimiert ist



**Abb. 7.72.** Konvergenz der Transitionsvorhersage bei Variation der Auflösung des Netzes in Hauptströmungsrichtung bei einem  $y^+$ , welches für  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$  optimiert ist



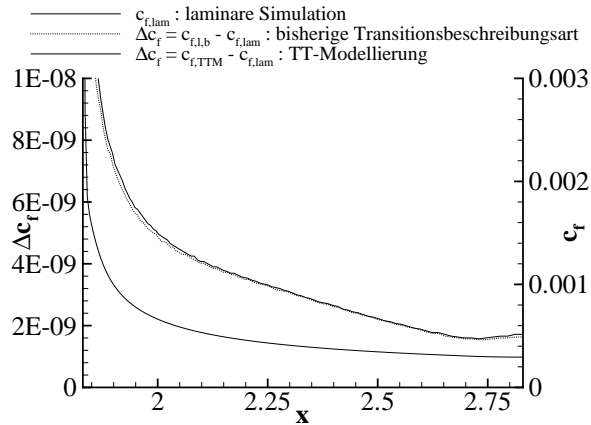
**Abb. 7.73.** Fixierte laminare Domäne zur Simulation einer volllaminaren Strömung mittels TT-Modellierung



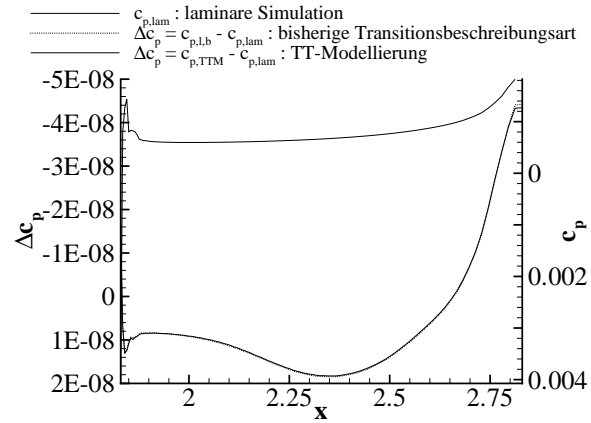
**Abb. 7.74.** Fixierte laminare Domäne zur Simulation einer vollturbulenten Strömung mittels TT-Modellierung

Für den turbulenten Strömungsfall ergibt sich das Abweichungsverhalten aus den Abbildungen 7.78 bis 7.80. Die relativ starke Abweichung im Reibungsbeiwert rührt sicherlich vom Sachverhalt her, dass bei der TT-modellierten Simulation weiterhin, eine wenn auch kleine, laminare Domäne existent war, die das Gebiet sehr hoher turbulenter Wirbelviskosität im Bereich vor dem Plattenanfang beeinflusst hat. Die beiden vorigen Vergleiche deuten nicht darauf hin, dass ein Programmierfehler vorliegt.

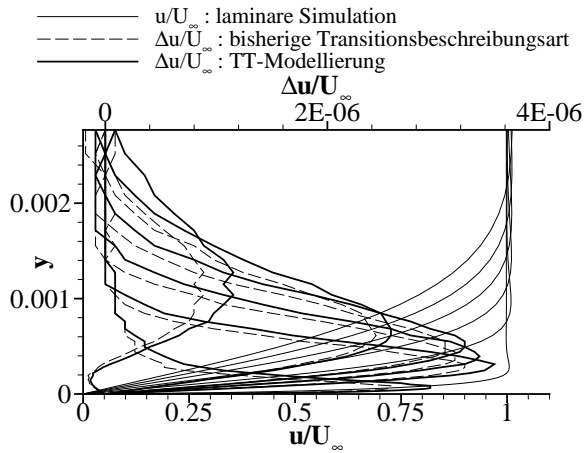
Nach der Untersuchung, in wie weit die TT-Modellierung in der Lage ist eine vollständig laminare oder turbulente Strömung abzubilden, wird nachfolgend die Modellierungsfähigkeit der transitionellen Strömung bei fixierter Transitionslage überprüft. Als Lage der fixierten Transition wird der Wert der experimentellen Transitionslage gewählt, wie sie in [18] für einen Turbulenzgrad von  $Tu_\infty = 0.0003$  angegeben wird. Die Lage der Transition des Experiments für den genannten Turbulenzgrad bei  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$ ,  $Ma_\infty = 0.071$ , ohne Äußerung darüber, welches spezifische Kriterium zur Angabe des Wertes verwendet wurde, wird als 48.83% der Plattenlänge angegeben. Dieser Wert wurde als fixierte Transitionslage der TT-Modellierung eingegeben. Stellt der angegebene Wert experimenteller Transition den Ort des lokalen Minimums des Reibungsbeiwertes dar, so ist für die mittels TT-Modellierung simulierte Strömung dieser Ort etwas weiter stromauf als im Experiment zu erwarten. Denn der bei der TT-Modellierung angegebene Wert zeichnet sich dadurch aus, dass dies den



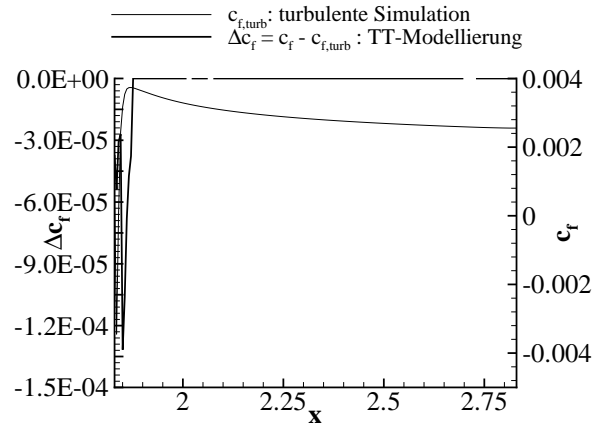
**Abb. 7.75.** Abweichung des lokalen Reibungsbeiwertes für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig laminar simulierten Lösung



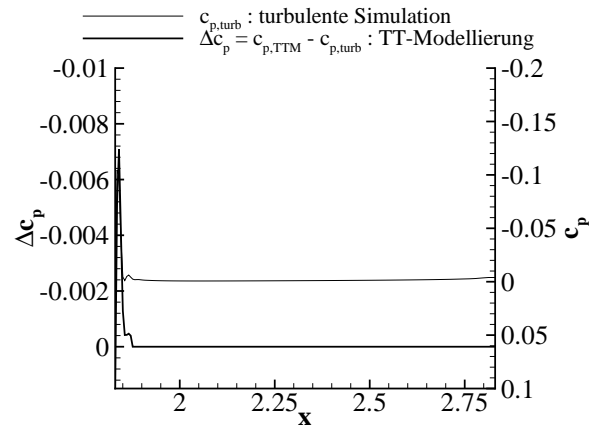
**Abb. 7.76.** Abweichung des Druckbeiwertes für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig laminar simulierten Lösung



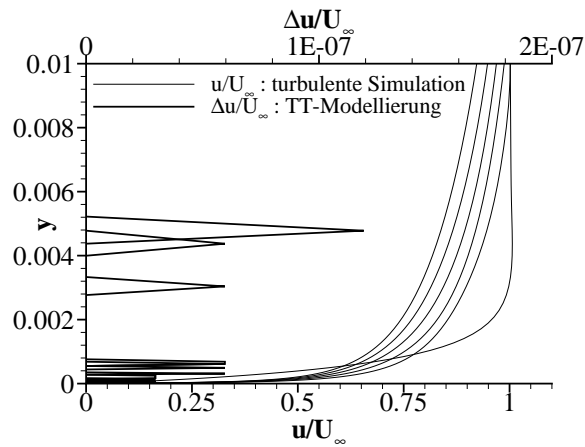
**Abb. 7.77.** Abweichung der  $u$ -Geschwindigkeit für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig laminar simulierten Lösung



**Abb. 7.78.** Abweichung des lokalen Reibungsbeiwertes für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig turbulent simulierten Lösung



**Abb. 7.79.** Abweichung des Druckbeiwertes für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig turbulent simulierten Lösung

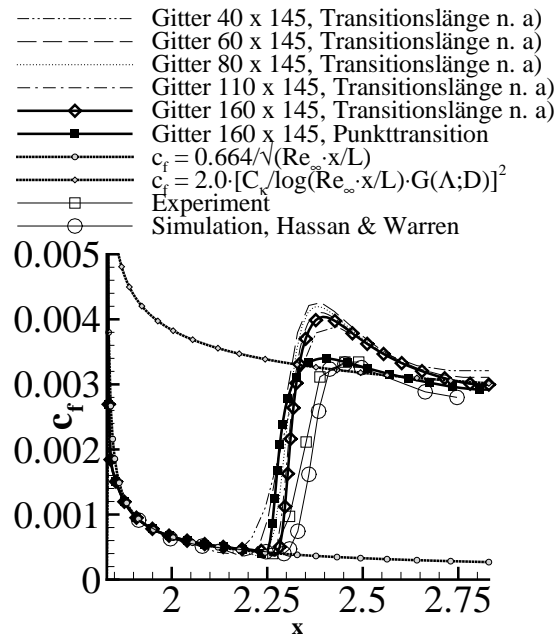


**Abb. 7.80.** Abweichung der  $u$ -Geschwindigkeit für die bisher verfügbare transitionelle Modellierungsmethode und die TT-Modellierung gegenüber der völlig turbulent simulierten Lösung

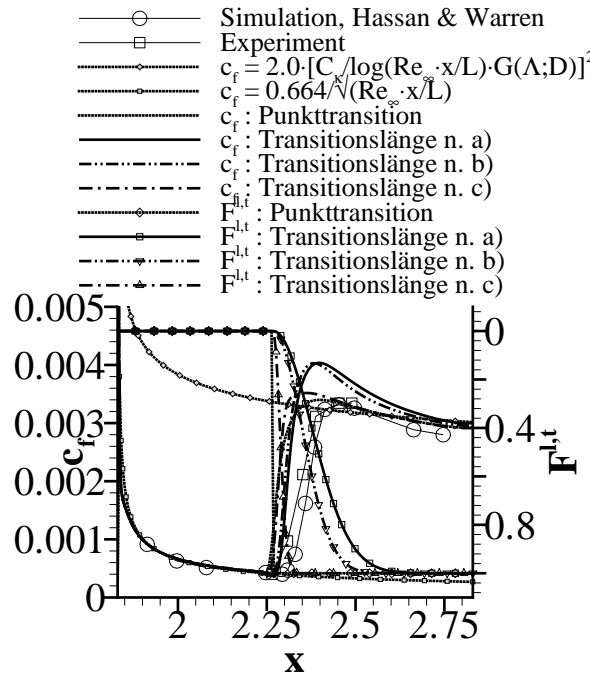
minimalsten Abstand zum Staupunkt darstellt, für den die Intermittenzfunktion einen Wert ungleich null annimmt. Die vorangegangenen Simulationen haben gezeigt, dass demgegenüber das lokale Minimum des Reibungsbeiwertes stets etwas weiter stromauf liegt. Diese Vermutung wird durch Abb. 7.81 bestätigt. Betrachtet wird dort das Lösungsverhalten für den genannten Strömungsfall bei Variation des Netzpunktzahl in Strömungsrichtung im Vergleich mit der experimentellen Verteilung des Reibungsbeiwertes und der Verteilung, die der TT-modellierten Simulation durch Hassan und Warren entspricht. Alle Simulationslösungen, bis auf diejenige, die durch die Kurve mit den ausgefüllten Quadraten repräsentiert wird, sind mit Hilfe der Transitionslängeformel a) ( $Re_\lambda = 9.0 Re_{st}^{0.75}$ ) erstellt worden. Die Lösungen unter Anwendung der Transitionslängeformel zeigen alle ein zu starkes Überschwingverhalten gegenüber den Vergleichslösungen. Die Lösung mit Punkttransition gibt das experimentelle Lösungsverhalten insgesamt besser wieder. Zwischen den beiden Modellierungsextremen, Punkttransition und der genannten Transitionslängenformel, wurden zwei weitere Transitionslängenformeln verwendet, die kleinere Transitionslängen errechnen. Zum einen ist dies die Formel, die der Theorie einer minimalen Transitionslänge [16,17] entspringt und als  $Re_\lambda = 1.55 Re_{st}^{0.75}$  c) angegeben wird (vgl. Kap. 3.2.5). Die andere Transitionslängenformel ist  $Re_\lambda = 22.0 Re_{st}^{0.67}$  b). Dies führt, wie in Abb. 3.11 zu sehen ist, für  $Re_{st} > 10^6$  zu wesentlich kleineren Transitionslängen als durch die Transitionslängenformel a) ermittelt wird. Für das 160'er Netz sind die Ergebnisse der Variation der Transitionslängenformel in Abb. 7.82 dargestellt. Die Transitionslängenformel c) gibt am ehesten den Verlauf des experimentellen und des durch Hassan und Warren TT-modellierten Reibungsbeiwertes in Bezug auf die Form wieder. Die Lage stimmt aus den zuvor genannten Gründen nicht überein.

Führt man nun eine Transitionsvorhersage für das 160'er Netz bei Variation der Transitionslängenformel zuzüglich einer Simulation mit Punkttransition durch, so ergibt sich das Verhalten der Transitionslagenkonvergenz aus Abb. 7.83. Demnach führen die am größten berechneten Transitionslängen, was bei Verwendung der Transitionslängeformel a) der Fall ist, für die wenigste Anzahl an Iterationen zu einer völlig laminaren Plattenströmung. Lediglich die Simulation mit Punkttransition zeigt ein gänzlich anderes Konvergenzverhalten als die Rechnungen mit Transitionslänge. Die Rechnung mit Punkttransition führt zu einer auskonvergierten Transitionslage bei etwa der Hälfte der Plattenlänge. Die korrespondierenden Transitionslängen für den Iterationsprozess zu Abb. 7.83 sind in Abb. 7.84 dargestellt. Der Verlauf des zugehörigen Reibungsbeiwertes für die Simulation mit Punkttransition ist in Abb. 7.85 dargestellt. Dieser Abbildung ist die Lösung einer Simulation mit fixierter Transition an der Stelle, die durch die Vorhersage mit Punkttransition bestimmt wurde, unter Anwendung der Transitionslängenformel c) hinzugefügt. Dadurch ist eine deutliche Verbesserung der Übereinstimmung aus TT-modellierter und experimenteller Lösung zu ersehen. Das Konvergenzverhalten der gesamten Strömungssimulation ist in Abb. 7.86 dargestellt. Bei der Simulation mit Punkttransition unterbleiben im Vergleich mit einer Simulation mit Transitionslängenformel die starken Oszillationen im Verlauf des  $\rho$ -Residuums.

Die Ergebnisse bei Variation des Netzes für TT-modellierte Transitionsvorhersage mit Punkttransition sind in Abb. 7.87 dargestellt. Bei Erhöhung der Punktzahl in Hauptströmungsrichtung ist für die auskonvergierte Lage der Transition kein asymptotisches Verhalten ersichtlich. Dies meint, dass sich die auskonvergierte Transitionslage bei Erhöhung der Punktzahl in Strömungsrichtung stets entsprechend der Erhöhung der Punktzahl weiter stromab verschiebt. Die Verschiebung wird bei Erhöhung der Punktzahl nicht geringer. Dieses Verhalten stellt die Lösung der Transitionsvorhersage mit Punkttransition auf dem 160'er Netz stark in Frage, die eine gute Übereinstimmung mit der experimentellen Lösung zeigte.



**Abb. 7.81.** Lokaler Reibungsbeiwert für eine TT-modellierte Simulation bei fixierter Transitionslage bei 48.83% der Plattenlänge in Abhängigkeit der Netzpunktzahl in Strömungsrichtung auf der Platte



**Abb. 7.82.** Lokaler Reibungsbeiwert für ein TT-modellierte Simulation bei fixierter Transitionslage bei 48.83% der Plattenlänge in Abhängigkeit von verschiedenen Transitionslängenformeln

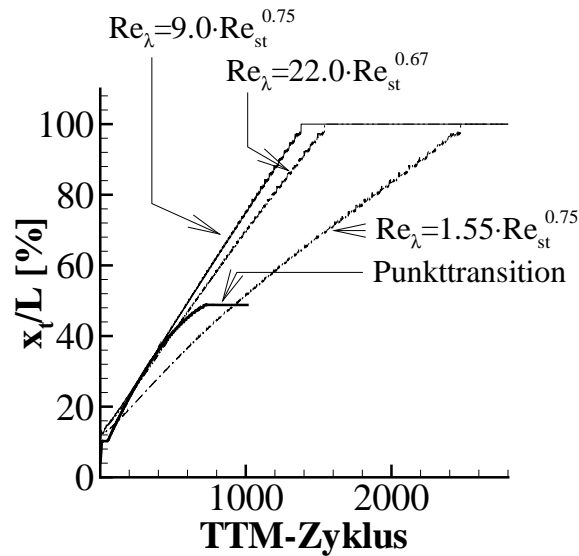


Abb. 7.83. Konvergenzverhalten der Transitionslagen bei Variation der Transitionslängenformel

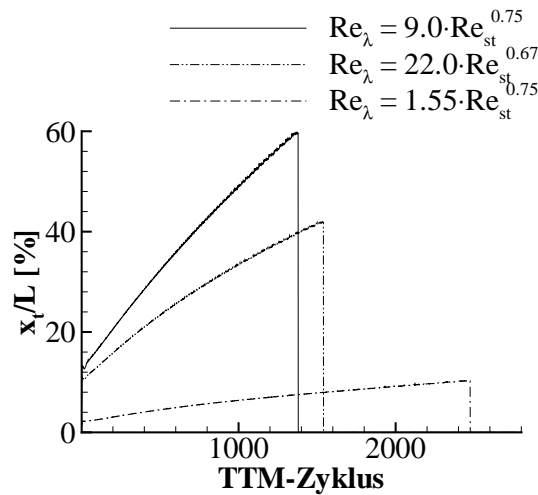


Abb. 7.84. Konvergenzverhalten der Transitionslängen bei Variation der Transitionslängenformel

### 7.1.3 Verhalten des modellspezifischen Transitionskriteriums der Plattenströmung

Abschließend wird das Verhalten des Kriteriums des Transitionsbeginns aus (4.51) in seiner Entwicklung entlang der Platte untersucht. Dazu werden drei verschiedene Simulationszustände betrachtet. Einerseits wird die Kriteriumsentwicklung einer vollturbulenten Strömung und andererseits zweier transitioneller Strömungen mit fixierter Transition bei 54.75% der Plattenlänge simuliert. Eine der transitionellen Strömungen wurde mit der bereits zuvor verfügbaren Transitionsmodellierungsmethode berechnet, die andere unter Verwendung der TT-Modellierung.

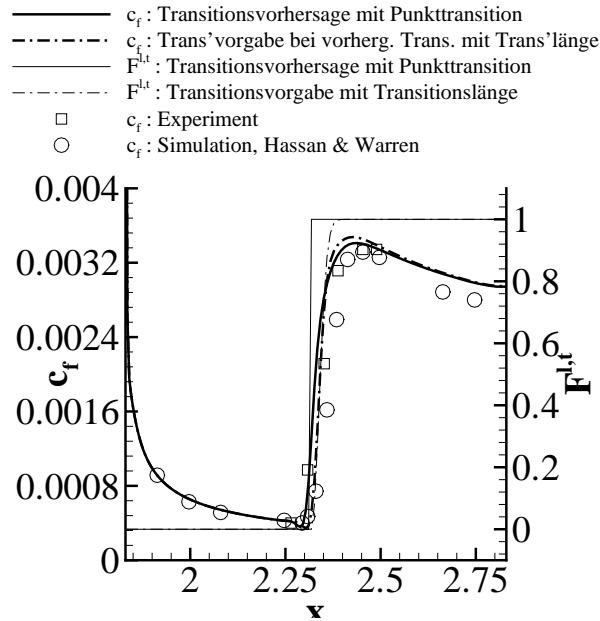


Abb. 7.85. Lokaler Reibungsbeiwert nach erfolgter Transitionsvorhersage mit Punkttransition

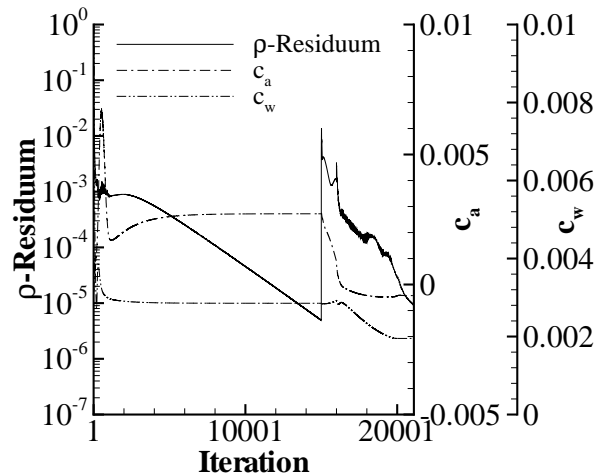
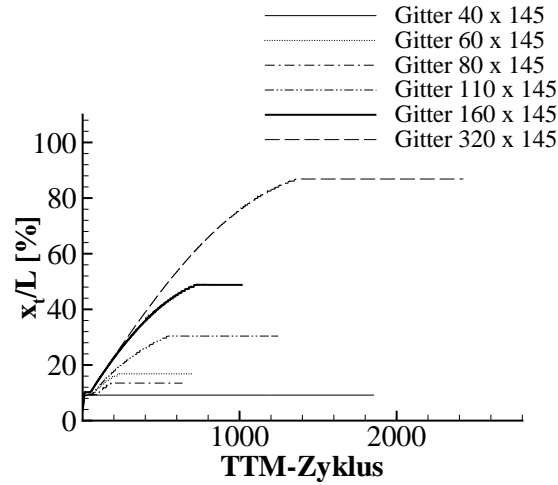


Abb. 7.86. Konvergenzverhalten des  $\rho$ -Residuums für die Simulation mit Transitionsvorhersage unter Verwendung von Punkttransition

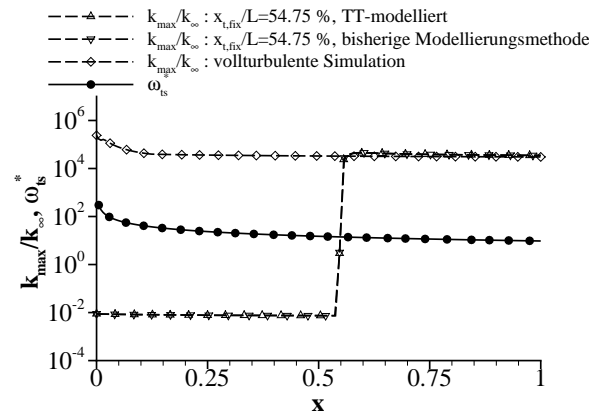
In das Transitionskriterium aus (4.51) gehen als maßgebliche Größen die Entwicklung der TS-Kreisfrequenz und der kinetischen Turbulenzenergie ein. Als Abschätzung für die Entwicklung der kinetischen Turbulenzenergie längs der Platte wird an jeder Stelle der Platte das jeweilige Maximum in wandnormaler Richtung als Funktionswert verwendet. Um eine Abschätzung für die Entwicklung der TS-Kreisfrequenz der Plattenströmung durchzuführen, wurde die funktionale Abhängigkeit von Größen des lokalen Grenzschichtandes ersetzt durch die Strömungswerte am Einströmungsrand. Diese sollten bei der inkompressiblen Plattenströmung nicht entscheidend von den Größen am Grenzschichttrand abweichen. Die Verläufe, die durch diese Abschätzungen für die Plattenströmung bei





**Abb. 7.87.** Konvergenzverhalten der Transitionslagenermittlung unter Anwendung von Punkttransition bei Variation der Punktzahl in Hauptströmungsrichtung auf der Platte

$Ma_\infty = 0.071$ ,  $Re_\infty = 6.11 \cdot 10^6$  und  $Tu_\infty = 3 \cdot 10^{-4}$  entstanden, sind dimensionslos in Abb. 7.88, dargestellt.



**Abb. 7.88.** Entwicklung der TS-Kreisfrequenz und der kinetischen Turbulenzenergie entlang der ebenen Platte

Deutlich ist in Abb. 7.88 abermals der Anstieg der kinetischen Turbulenzenergie über das Maß des Einströmwertes am Plattenbeginn zu erkennen, welches bei zunächst laminarer Grenzschicht unterbleibt. Ähnlich dem Verlauf des Reibungsbeiwertes steigt die kinetische Turbulenzenergie der transitionellen Strömungen an der Stelle des Transitionsbeginns sprunghaft auf bzw. leicht über den Wert der vollturbulenten Strömung an. Die dimensionslose TS-Kreisfrequenz nimmt einem hyperbolischen Verlauf folgend entlang der Platte kontinuierlich ab. Die beiden verschiedenen Transitionsmodellierungsmethoden verhalten sich gleich hinsichtlich der Ausbildung des lokalen Maximums der kinetischen Turbulenzenergie.

Der zu Abb. 7.88 gehörende Verlauf des Kriteriumswertes  $C_{krit}$  ist in Abb. 7.89 für alle drei Simulationen dargestellt. Gemäß des Kriteriums wird der Beginn der Transition für  $C_{krit} = 1$  angesetzt. Die Strömung ist laminar für Werte  $C_{krit} < 1$  und transitionell bis turbulent für Werte  $C_{krit} > 1$ . Bei

der vollturbulenten Strömung ist die Erfüllung des Transitionskriteriums zwischen dem dritten und vierten Netzpunkt zu erkennen. Für die transitionellen Strömungen gilt, dass das Kriterium direkt an der Stelle der gesetzten Transition erfüllt ist. Die Verläufe spiegeln die zu erwartende Entwicklung des Kriteriums wieder. Wie schon in früheren Abbildungen zu ersehen war, funktioniert die Transitionsmodellierungseigenschaft des Modells zufriedenstellend. Dies wird durch die Entwicklung des Kriteriums abermals bestätigt. Ein Einblick in die Mechanismen der Transitionsvorhersage und der Entwicklung des Kriteriums während des Prozesses der Vorhersage ist auf diese Weise nicht zu erzielen.

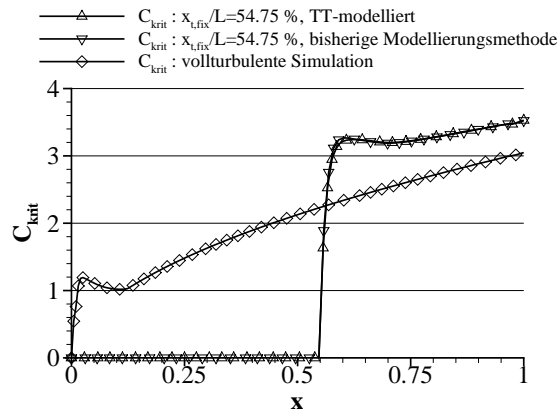
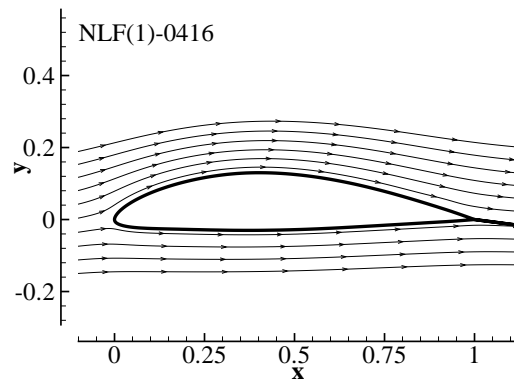


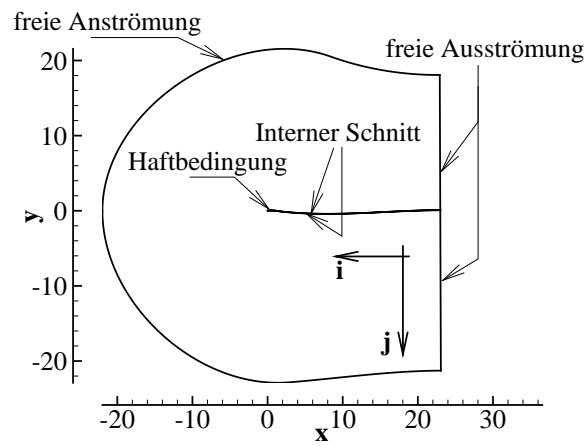
Abb. 7.89. Entwicklung des Referenzwertes des Transitionskriteriums entlang der ebenen Platte

## 7.2 Laminarprofil

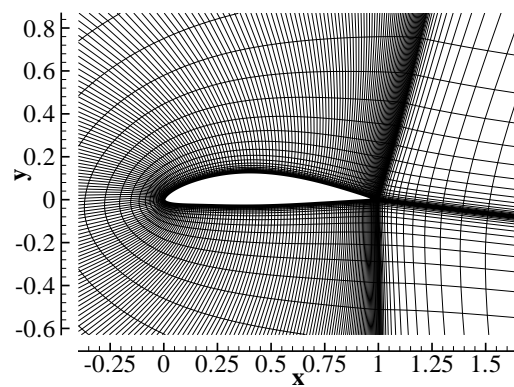
Dieser Abschnitt dient der Untersuchung des Lösungsverhaltens der TT-Modellierung für die Umströmung des Laminarprofils mit der Bezeichnung NLF(1)-0416. Nach dessen Entwickler wird das Profil im Folgenden als Somers-Profil bezeichnet ([29]). Zwei Anströmungszustände werden untersucht. Zum einen wird das Profil unter dem Anstellwinkel  $\alpha = 0.01^\circ$  und zum anderen unter  $\alpha = 2.03^\circ$  bei  $Re_\infty = 4 \cdot 10^6$  und  $Ma_\infty = 0.1$  angeströmt. Das Profil ist die Anströmung unter  $\alpha = 2.03^\circ$  in der Abb. 7.90 dargestellt. Das Integrationsgebiet für die Umströmung des Somers-Profiles ist in Abb. 7.92 mit den bei der Simulation eingestellten Randbedingungen dargestellt. In der Indexrichtung  $i$  besitzt das verwendete Netz 337 Punkte, in  $j$ -Richtung sind dies 73 Netzpunkte. Die Profilkontur ist durch 256 Netzpunkte diskretisiert. Ein Ausschnitt des Netzes um das Somers-Profil ist in Abb. 7.91 zu sehen. Die  $y^+$ -Verteilung für die Simulation mit  $\alpha = 0.01^\circ$  ist in Abb. 7.93 dargestellt. Für die beiden Anstellwinkel ergaben sich im Experiment die Transitionslagen der Tab. 7.2. Zunächst wurden die TT-Modellierungseigenschaften bei fixierter Transition an den Stellen untersucht, die den experimentellen Transitionslagen entsprechen. Die sich ergebende laminare Domäne bei Simulation der Umströmung mit  $\alpha = 0.01^\circ$  ist in Abb. 7.94 für die zu diesem Strömungsfall passenden experimentellen Transitionslagen dargestellt. Die Abbildungen 7.95 und 7.96 zeigen den Vergleich des Reibungsbeiwertes der bisherigen Transitionsmodellierungsmethode und der TT-Modellierung. Die bisherige Methode wurde mit Punktransition simuliert, während bei der TT-Modellierung die Transitionslängenformel c) verwendet wurde. Der Verlauf des Reibungsbeiwertes der Oberseite ist jeweils durch die obere Kurve



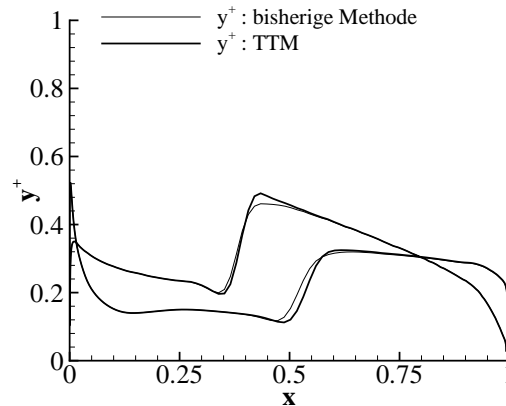
**Abb. 7.90.** Somers-Profil unter  $2.03^\circ$  Anströmung



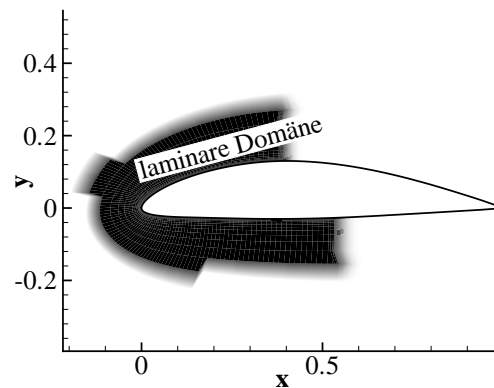
**Abb. 7.91.** Ausschnitt des Netzes um das Somers-Profil



**Abb. 7.92.** C-Blockstruktur des Netzes um das Somers-Profil mit Randbedingungen der Strömungssimulation



**Abb. 7.93.**  $y^+$ -Verteilung der Umströmung des Somers-Profils bei  $\alpha = 0.01^\circ$

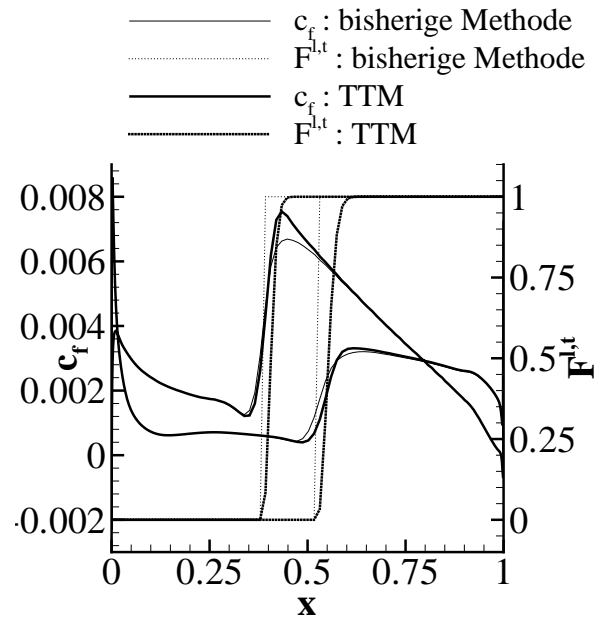


**Abb. 7.94.** Laminare Domäne um das Somers-Profil bei fixierter Transition bei 38.5% der Profiltiefe auf der Oberseite und bei 52.5% der Profiltiefe auf der Unterseite

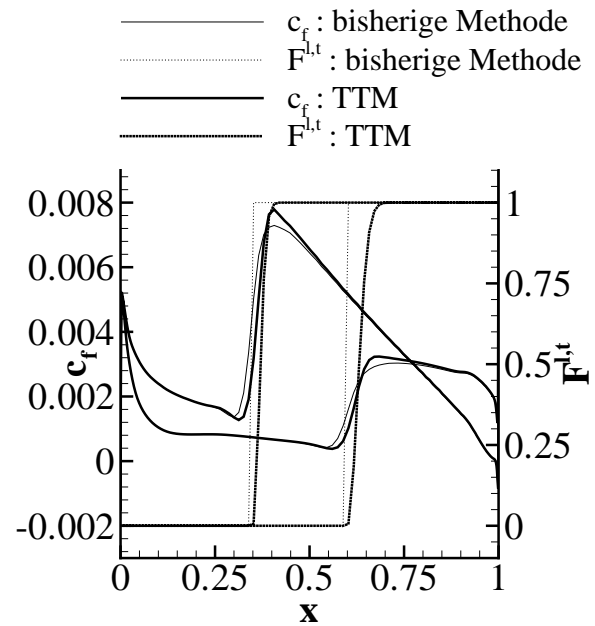
Anstellwinkel	Transitionslagen in Prozent der Profiltiefe	
	Oberseite	Unterseite
$0.01^\circ$	38.5	52.5
$2.03^\circ$	35.0	60.0

**Tab. 7.2.** Experimentelle Transitionslagen der Umströmung des Somers-Profils

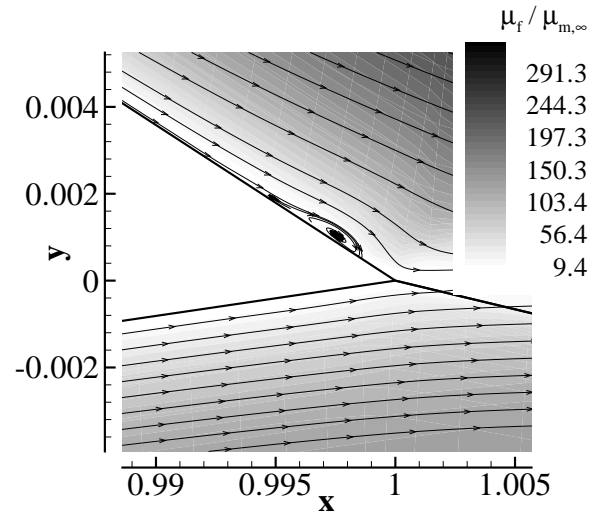
repräsentiert. Gegenüber der Lösung mit Punkttransition ist gut das verstärkte Überspringen über die Lösung mit Punkttransition, sowie das leichte Wandern des lokalen Minimums des Reibungsbeiwertes stromab, zu sehen. Weiterhin ist zu ersehen, dass der Reibungsbeiwert der Oberseite für beide Anstellwinkel negative Werte im Bereich der Hinterkante annimmt, was auf ein schwaches Ablösungsgebiet in diesem Bereich schließen lässt. Diese beiden Ablösgebiete sind in den Abbildungen 7.97 und 7.98 für die beiden verschiedenen Anstellwinkel dargestellt. Das Konvergenzverhalten für die Anströmung unter den beiden Anstellwinkeln ist in den Abbildungen 7.99 und 7.100 dokumentiert. Für die Lösung zu beiden Anstellwinkeln ergibt sich ein leichter Anstieg des Auftriebsbeiwertes und ein erheblicher



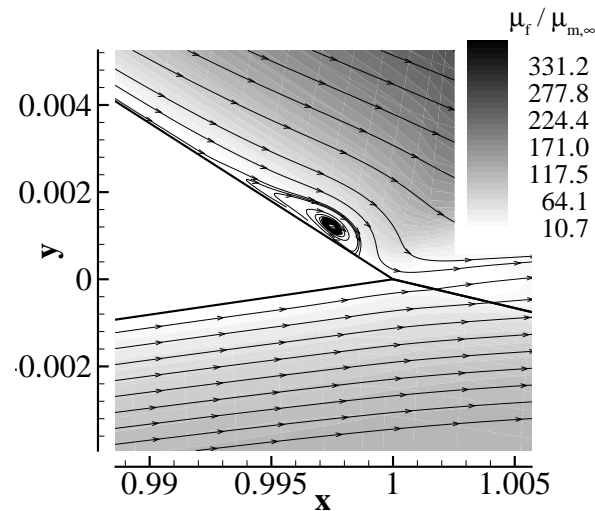
**Abb. 7.95.** Verlauf des lokalen Reibungsbeiwertes für das Somers-Profil bei fixierter Transition an der Stelle experimenteller Transition für den Anstellwinkel  $\alpha = 0.01^\circ$



**Abb. 7.96.** Verlauf des lokalen Reibungsbeiwertes für das Somers-Profil bei fixierter Transition an der Stelle experimenteller Transition für den Anstellwinkel  $\alpha = 2.03^\circ$

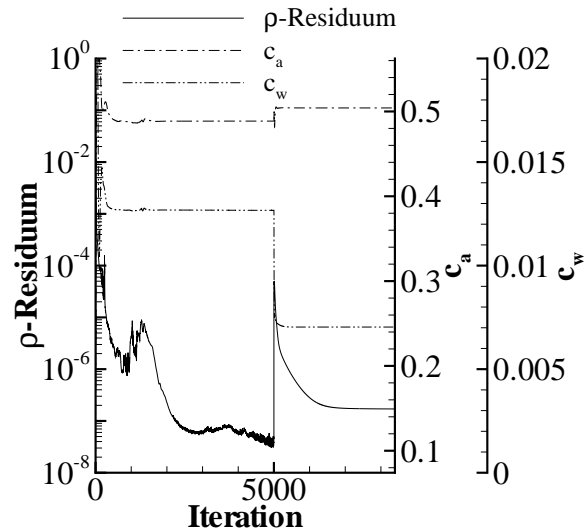


**Abb. 7.97.** Ablösegebiet im Bereich der Hinterkante für die Anströmung des Somers-Profil bei experimenteller Transitions-lage für den Anstellwinkel  $\alpha = 0.01^\circ$

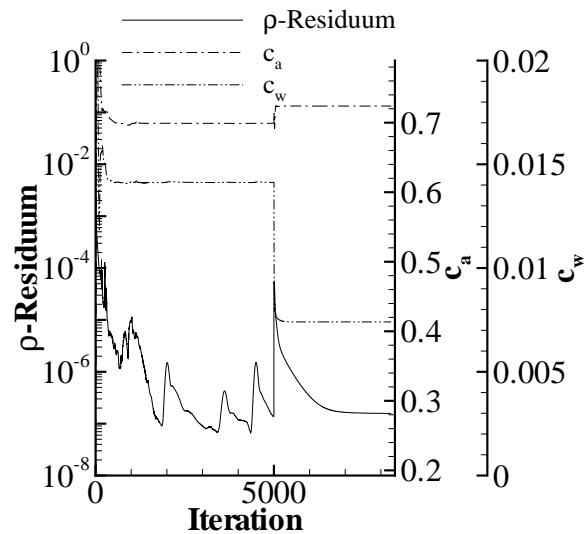


**Abb. 7.98.** Ablösegebiet im Bereich der Hinterkante für die Anströmung des Somers-Profil bei experimenteller Transitions-lage für den Anstellwinkel  $\alpha = 2.03^\circ$

Abfall des Widerstandsbeiwertes in Bezug auf die als *restart* eingesetzte vollturbulente Lösung. Die Konvergenz des  $\rho$ -Residuums ist zufriedenstellend. Der Übergang der laminaren Strömungsform in die turbulente Strömungsform ist sehr gut an der Entwicklung der Geschwindigkeitsprofile entlang der Profilkontur für beide Anströmungen unter den veränderten Anstellwinkeln zu sehen. Für den Anstellwinkel  $\alpha = 0.01^\circ$  sind die entsprechenden Abbildungen für Ober- und Unterseite 7.101 und 7.102. Die Abbildungen 7.103 und 7.104 zeigen den Übergang für den Strömungsfall des Anstellwinkels  $\alpha = 2.03^\circ$ . Die turbulente Strömungsform ist durch das völliger Profil gekennzeichnet, welches sich durch die Geschwindigkeitsvektoren abzeichnet.

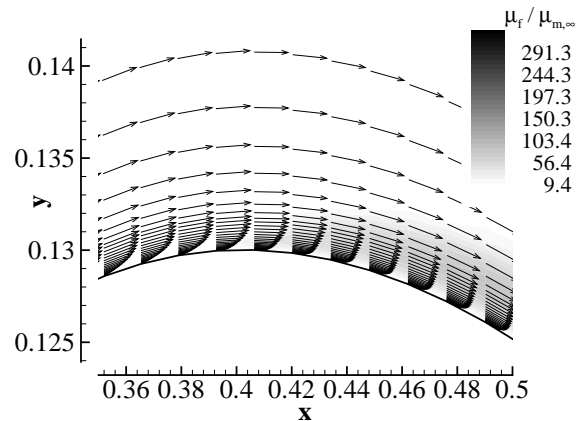


**Abb. 7.99.** Verlauf des  $\rho$ -Residuums, des Auftriebsbeiwerts und des Widerstandsbeiwertes für das Somers-Profil bei fixierter Transition an der Stelle experimenteller Transition für den Anstellwinkel  $\alpha = 0.01^\circ$

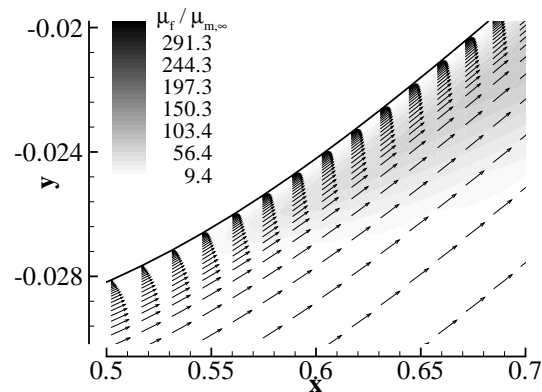


**Abb. 7.100.** Verlauf des  $\rho$ -Residuums, des Auftriebsbeiwerts und des Widerstandsbeiwertes für das Somers-Profil bei fixierter Transition an der Stelle experimenteller Transition für den Anstellwinkel  $\alpha = 2.03^\circ$

Abschließend wurde das Vorhersageverhalten der TT-Modellierung für die beiden Anstellwinkelfälle für die Umströmung des Somers-Profiles untersucht. Zunächst ist das Verhalten der ermittelten Transitionslagen im Verlauf des Iterationsprozesses für beide Anstellwinkel in den Abbildungen 7.105 und 7.106 dargestellt. Die verschiedenen Kurven sind jeweils einer anderen, der Transitionsvorhersage zunächst vorgegebenen Starttransitions-lage zugeordnet. Unabhängig von der vorhergesagten Lage der Transition ist das Vorhersageverfahren mit Punkttransition ungeeignet, da sich in Abhängigkeit der Starttransition jeweils eine andere auskonvergierte Transitions-lage ergibt. Es ist anzumerken, dass die Angaben hinsichtlich der Transitions-lagen in Prozent jeweils den Anteil an der Länge der Bogenlänge



**Abb. 7.101.** Übergangsverhalten der konturnahen Geschwindigkeitsvektoren von laminar zu turbulent für die Oberseite des Somers-Profils bei fixierter Transition an experimenteller Stelle für den Anstellwinkel  $\alpha = 0.01^\circ$



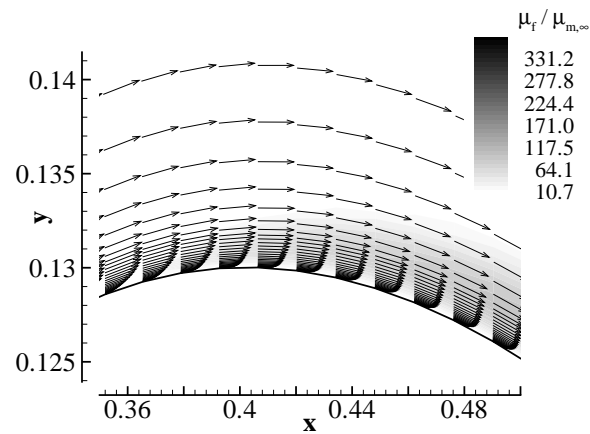
**Abb. 7.102.** Übergangsverhalten der konturnahen Geschwindigkeitsvektoren von laminar zu turbulent für die Unterseite des Somers-Profils bei fixierter Transition an experimenteller Stelle für den Anstellwinkel  $\alpha = 0.01^\circ$

entlang der Ober- oder Unterseitenkontur darstellt. Die Werte entsprechen nicht der Position als Anteil der Profiltiefe.

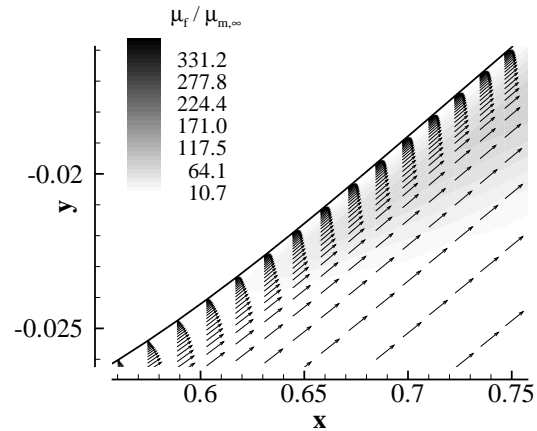
Für den Fall der Transitionsvorhersage bei Simulation einer Transitionslänge mit Hilfe der Transitionslängenformel c) ergibt sich für das Verhalten der Transitionslage über dem Iterationsprozess das, welches in Abb. 7.107 für den Anstellwinkel  $\alpha = 0.01^\circ$  gezeigt wird. Die entsprechende Abbildung für den Anstellwinkel  $\alpha = 2.03^\circ$  ist 7.108. Die Transitionslängen, die über den Iterationsprozess für die beiden Umströmungsfälle errechnet wurden, sind in den Abbildungen 7.109 und 7.110 dargestellt.

Hinsichtlich des Transitionsvorhersageprozesses mit Transitionslänge besteht das gleiche Verhalten, wie es schon bei der ebenen Plattenströmung zu verzeichnen war. Die Transitionslage wandert letztenendes im Iterationsprozess bis zur Hinterkante der zweidimensionalen Strömungskonfiguration. Es ist aus den Abbildungen 7.107 und 7.108 zu sehen, dass mit der Datenstruktur für die Unterseite im Bereich der Hinterkante etwas nicht stimmt. Der Entfernungswert der Transitionslage entspricht zwar der Hinterkante, dennoch wird dieser Netzpunkt vom Verfahren durch seinen Ober-/Unterseitenstatus nicht als Hinterkantenpunkt identifiziert. Denn dies hätte die explizite Setzung der Transitionslage



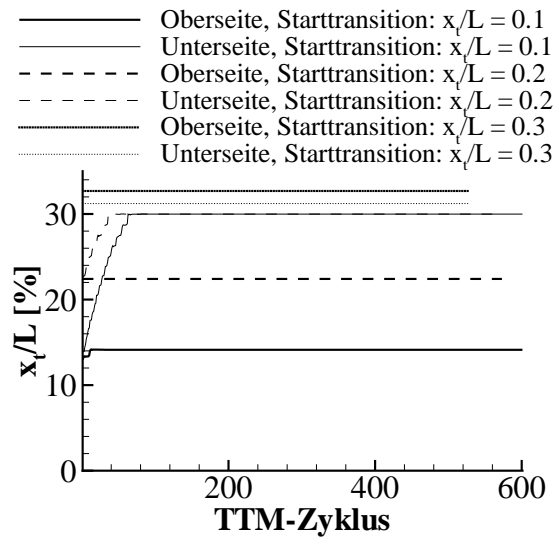


**Abb. 7.103.** Übergangsverhalten der konturnahen Geschwindigkeitsvektoren von laminar zu turbulent für die Oberseite des Somers-Profils bei fixierter Transition an experimenteller Stelle für den Anstellwinkel  $\alpha = 2.03^\circ$

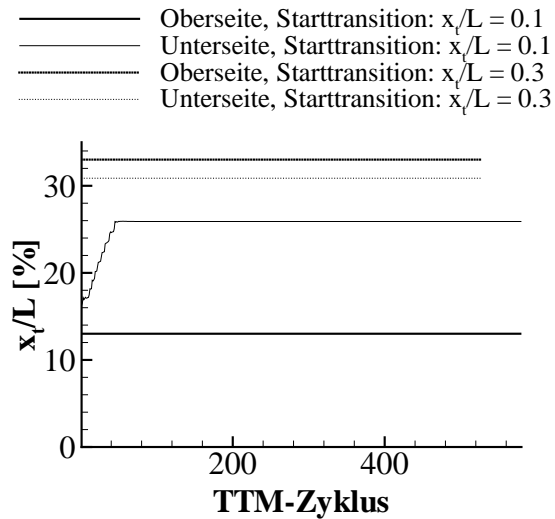


**Abb. 7.104.** Übergangsverhalten der konturnahen Geschwindigkeitsvektoren von laminar zu turbulent für die Unterseite des Somers-Profils bei fixierter Transition an experimenteller Stelle für den Anstellwinkel  $\alpha = 2.03^\circ$

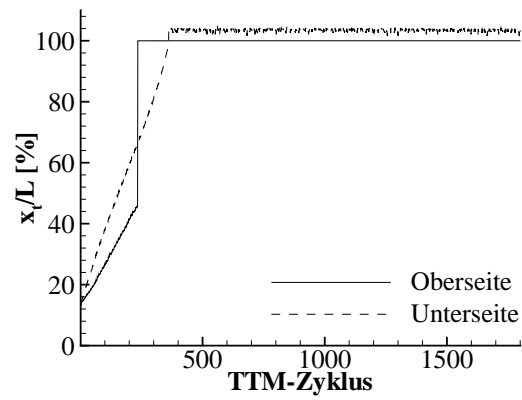
mit dortiger Punkttransition auf die Hinterkante zur Folge. Die Transitionslage der Unterseite oszilliert aber in den gezeigten Ergebnissen noch.



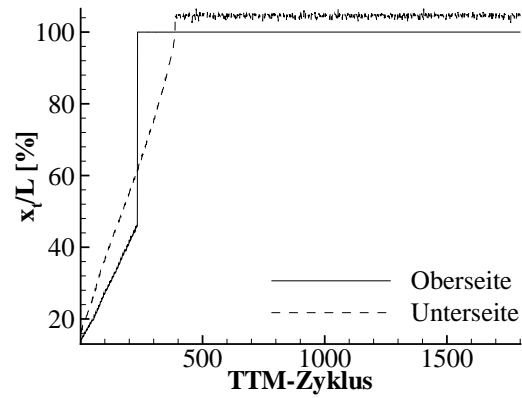
**Abb. 7.105.** Verhalten der Transitionslagen während des Transitionsvorhersageprozesses bei Punktransition und Variation der Starttransition für  $\alpha = 0.01^\circ$



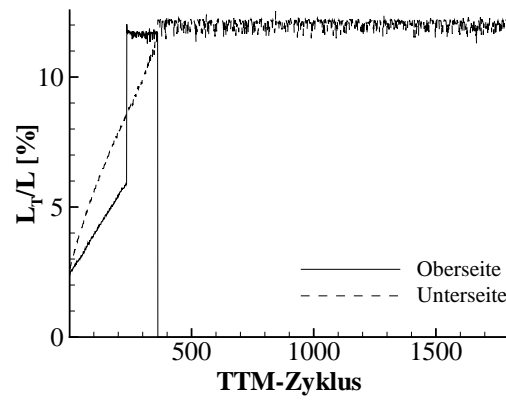
**Abb. 7.106.** Verhalten der Transitionslagen während des Transitionsvorhersageprozesses bei Punktransition und Variation der Starttransition für  $\alpha = 2.03^\circ$



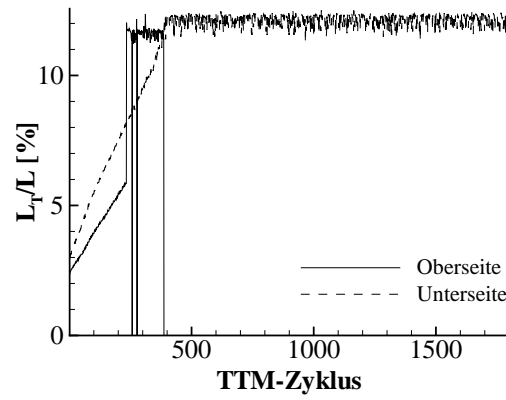
**Abb. 7.107.** Verhalten der Transitionslagen während des Transitionsvorhersageprozesses mit Transitionslänge nach Transitionslängeformel c) für  $\alpha = 0.01^\circ$



**Abb. 7.108.** Verhalten der Transitionslagen während des Transitionsvorhersageprozesses mit Transitionslänge nach Transitionslängeformel c) für  $\alpha = 2.03^\circ$



**Abb. 7.109.** Verhalten der Transitionslängen während des Transitionsvorhersageprozesses mit Transitionslänge nach Transitionslängeformel c) für  $\alpha = 0.01^\circ$



**Abb. 7.110.** Verhalten der Transitionslängen während des Transitionsvorhersageprozesses mit Transitionslänge nach Transitionslängeformel c) für  $\alpha = 2.03^\circ$

## Fazit

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde in den Strömungslöser *FLOWer* das Transitionsschließungsmodell nach Hassan und Warren in Kopplung mit dem  $k-\omega$ -Turbulenzmodell nach Wilcox implementiert. Die bereits bestehende Implementierung der Turbulenzmodelle in *FLOWer* wurde als Ausgangsbasis für eine modulare Struktur zur Kopplung des Transitionsschließungsmodells nach Hassan und Warren mit anderen bereits in *FLOWer* verfügbaren Turbulenzmodellen verwendet. Das Transitionssmodell ist nur für ebene Strömungsfälle implementiert. Die implementierte Form des Transitionssmodells ist geeignet, um die Umströmung zweidimensionaler Mehrelementkonfigurationen transitionell zu simulieren.

Das implementierte Verfahren wurde für den Fall der ebenen Plattenströmung und der einer Laminar-Profilmströmung für Unterschallströmungen sehr geringer Mach-Zahlen validiert. Zunächst wurden Untersuchungen durchgeführt, die eine Strömung ohne Transition simulierten. Dabei zeigte sich für die Plattenströmung, dass für den gewählten Anströmungszustand eine Simulation unter Anwendung der Präkonditionierungstechnik notwendig war. Alle Validierungsrechnungen wurden daher unter Nutzung dieser Technik durchgeführt.

Um einen Einblick in die Simulationseigenschaften der Turbulenzmodellierung gemäß des Wilcox-Modells zu erhalten, wurde dieses im Vergleich mit dem Baldwin-Lomax-Modell für eine vollturbulente Plattenströmung untersucht. Dabei zeigte sich, dass bei der Wilcox-Modellierung im Bereich der Plattenvorderkante ein unphysikalisches Rezirkulationsgebiet berechnet wird, welches bei Simulation mit dem Baldwin-Lomax-Modell ausbleibt. Weiterhin berechnet das Wilcox-Modell gegenüber dem Baldwin-Lomax-Modell ein Vielfaches an kinetischer Turbulenzenergie entlang der gesamten Platte und insbesondere im Bereich der Plattenvorderkante.

Um den Einfluss des Turbulenzgrades am Einströmungsrand auf die Berechnung der turbulenten Plattengrenzschicht zu untersuchen, wurde der Turbulenzgrad im Bereich von 0.3 bis 0.00003 unter gleichzeitiger Konstanz des Verhältnisses aus turbulenter Viskosität und molekularer Viskosität am Einströmungsrand variiert. Dies erfolgte für eine Simulation bei fixierter Transition bei der Hälfte der Plattenlänge unter Anwendung der bereits bestehenden Transitionssmodellierungsmethode. Im vollturbulenten Bereich zeigte sich ein schwacher Einfluss des Turbulenzgrades der ungestörten Anströmung für den Wertebereich von 0.03 bis 0.00003 auf den Reibungsbeiwert. Für den Turbulenzgrad von 0.3 stellte sich eine gänzlich laminare Strömung ein. Weiterhin ist zu bemerken, dass der eingestellte Turbulenzgrad am Einströmungsrand bei Betrachtung entlang der Symmetrieebene einem hyperbolischen Verlauf folgend jeweils auf einen Wert gleicher Größenordnung abgebaut wird. Somit ist der Turbulenzgrad zum Beginn der Platte jeweils von gleicher Größenordnung.

Die Erfahrungen der Transitionsvorhersage mit dem neu implementierten Transitionsmodell in Kopplung mit dem Wilcox-Turbulenzmodell zeigten, dass das Transitionsmodell der Verwendung der so genannten laminaren Domänen bedurfte. Denn nur in dieser Weise war es auch im Hinblick auf die Simulation von Mehrelementkonfigurationen durch Ausdehnung eines laminar fixierten Bereichs auf Gebiete stromauf der Vorderkante möglich, das Übermaß an Turbulenzproduktion an der Vorderkante im Rahmen der Wilcox-Modellierung zu unterbinden. Denn dieses führte ohne die Maßnahme laminarer Hüllen zu der Vorhersage der Transition an der Stelle wenige Netzkpunkte stromab der Platten-vorderkante, welches nicht den Ergebnissen des Experiments für den gewählten Anströmungszustand entsprach.

Um das implementierte Verfahren grundsätzlich auf Programmierfehler zu untersuchen, wurde das Transitionsmodell so verwendet, dass es eine gänzlich laminare und gänzlich turbulente Strömung simulierte. Hierbei konnte im Vergleich mit der bereits bestehenden Transitionsmodellierung die gleiche Abweichung charakteristischer Strömungsgrößen gegenüber der rein laminaren oder turbulenten Simulation ohne Verwendung eines Transitionsmodells festgestellt werden. Das implementierte Transitionsmodell ist daher in der Lage eine gänzlich laminare und turbulente Strömung abzubilden.

Um alleinig die Modellierungsfähigkeit des Transitionsmodells zu prüfen, wurden Simulationen bei fixierter Transition an der Stelle der experimentell auftretenden Transition durchgeführt. Die Modellierungsfähigkeit der physikalisch motivierten Methode ist insgesamt als gut und gegenüber der numerisch motivierten Methode, laminare Netzkpunkte durch Unterdrückung der Turbulenzproduktion zu simulieren, als gleichwertig zu bewerten. Ein starker Einfluss auf die Ausbildung des Reibungsbeiwertes entlang der Platte ist durch die Punkteanzahl in Hauptströmungsrichtung gegeben. Eine Erhöhung der Punkteanzahl führt bei gleicher Vorgabe des Transitionspunktes durch den Benutzer zu einer Wanderung des lokalen Minimums des Reibungsbeiwertes in Richtung stromab. Weiterhin ist ein leichter Einfluss im transitionellen sowie turbulenten Bereich durch den Abstand der ersten wandnormalen Netzlinie zu verzeichnen. Die Untersuchung verschiedener Transitionslängenformeln hat gezeigt, dass die Formel minimaler Transitionslänge sowie eine Simulation unter Punkttransition die beste Annäherung an den experimentellen Verlauf ergibt. Die Untersuchung des Einflusses der künstlich zugefügten Verfahrensdissipation auf der Basis vierter Differenzen zeigt, dass eine Reduktion der künstlichen Dissipation dieser Art die Ausprägung des lokalen Minimums und Maximums des Reibungsbeiwertes verstärkt, sowie die Steigung des Reibungsbeiwertes im transitionellen Bereich erhöht.

Die Untersuchung der Vorhersagefähigkeit des implementierten Modells für Transition führt insgesamt zu dem Ergebnis, dass die Vorhersagefähigkeit des Transitionsmodells als schlecht zu bezeichnen ist. Das Verfahren ist nicht in der Lage den Punkt des Transitionsbeginns zuverlässig vorherzusagen. Das Verfahren reagiert bei Konstanz der Transitionslängenformel und Variation der Netzkpunktanzahl in Hauptströmungsrichtung in der Weise, dass bei Erhöhung dieser Netzkpunktanzahl der detektierte Transitionspunkt im Rahmen des Iterationsprozesses in weniger Iterationsschritten an die Hinterkante verschoben wird und sich somit jeweils eine vollturbulente Strömung gemäß des verwendeten Turbulenzmodells ausbildet. Die Konstanz der Netzkpunktanzahl in Hauptströmungsrichtung und Variation der Transitionslängenformel führt dazu, dass bei kleineren berechneten Transitionslängen durch die Transitionslängenformel der Prozess des Verschiebens des Transitionspunktes auf die Hinterkante insgesamt mehr Iterationsschritte benötigt. Alleinig die Verwendung von Punkttransition führt für das Gitter mit 160 Netzkunkten entlang der Platte dazu, dass der experimentelle Verlauf des Reibungsbeiwertes gut vorhergesagt wird. Jedoch versagt das Modell bei Verwendung von Punkttransition bei gleichzeitiger Variation der Netzkpunktanzahl entlang der Platte abermals. Denn diese Variation führt dazu, dass jeweils unterschiedliche Transitionslagen am Ende des Iterationsprozesses vorhergesagt

werden. Hierbei ist keine Form von asymptotischem Verhalten gegenüber der Netzverfeinerung in Hauptströmungsrichtung zu verzeichnen. Es ist dementsprechend kein Zustand zu erreichen, bei dem unter weiterer Netzverfeinerung keine Änderung der Strömungslösung mehr stattfindet. Der Punkt detektierter Transition am Ende des Iterationsprozesses wandert unter Netzverfeinerung kontinuierlich stromab. Auch die Abschätzung des Verhaltens des Referenzwertes des verwendeten Transitionskriteriums bei fixierter Transition erbringt keine Klärung über die Ursache des Versagens des Vorhersageverfahrens. Insgesamt ist ein Einblick in den Verlauf des Transitionskriteriums über den Prozess der Iteration notwendig, um weitergehende Schlussfolgerungen zu ziehen.

Insgesamt kann man die Transitionsmodellierungseigenschaft, also die Fähigkeit des Modells in einem Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Code sowohl laminare und transitionelle als auch turbulente Strömungsbereiche auf physikalischer Grundlage wiederzugeben, als gut bezeichnen. Die Verwendung des Modells gestattet damit die Simulation laminarer und transitioneller Strömungsbereiche, ohne dass man auf die artifizielle Methode der Manipulation der Wirbelviskosität in laminaren Bereichen oder auf die Wirkung der numerischen Dissipation zur Wiedergabe von künstlich erzeugten Transitiongebieten im Rahmen der Punkttransition angewiesen ist.

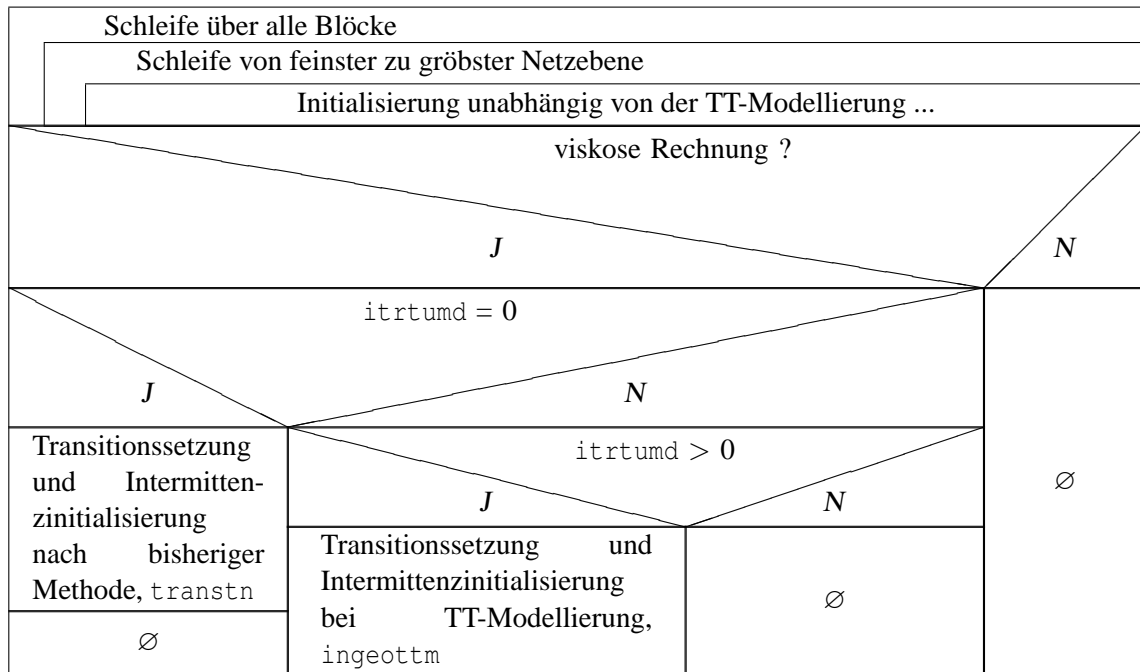
Die Eigenschaft des Modells die Transitionslagen vorherzusagen, hat sich im Rahmen der bisher durchgeführten Untersuchungen als mangelhaft erwiesen. Dieses Urteil trifft auch auf die Simulation des Laminar-Profils zu.

# A

## Strukturdiagramme der Modellimplementierung

Die nachfolgenden Strukturdiagramme stellen einen Auszug der veränderten oder neu eingeführten Routinen zur TT-Modellierung dar. Die dargestellten Routinen werden für das Verständnis des Ablaufs der TT-Modellierung als entscheidend eingestuft. Die Notation erfolgt gemäß den Richtlinien nach Nassi-Shneidermann.

### A.1 Veränderte Struktur der Routine `initgeom`



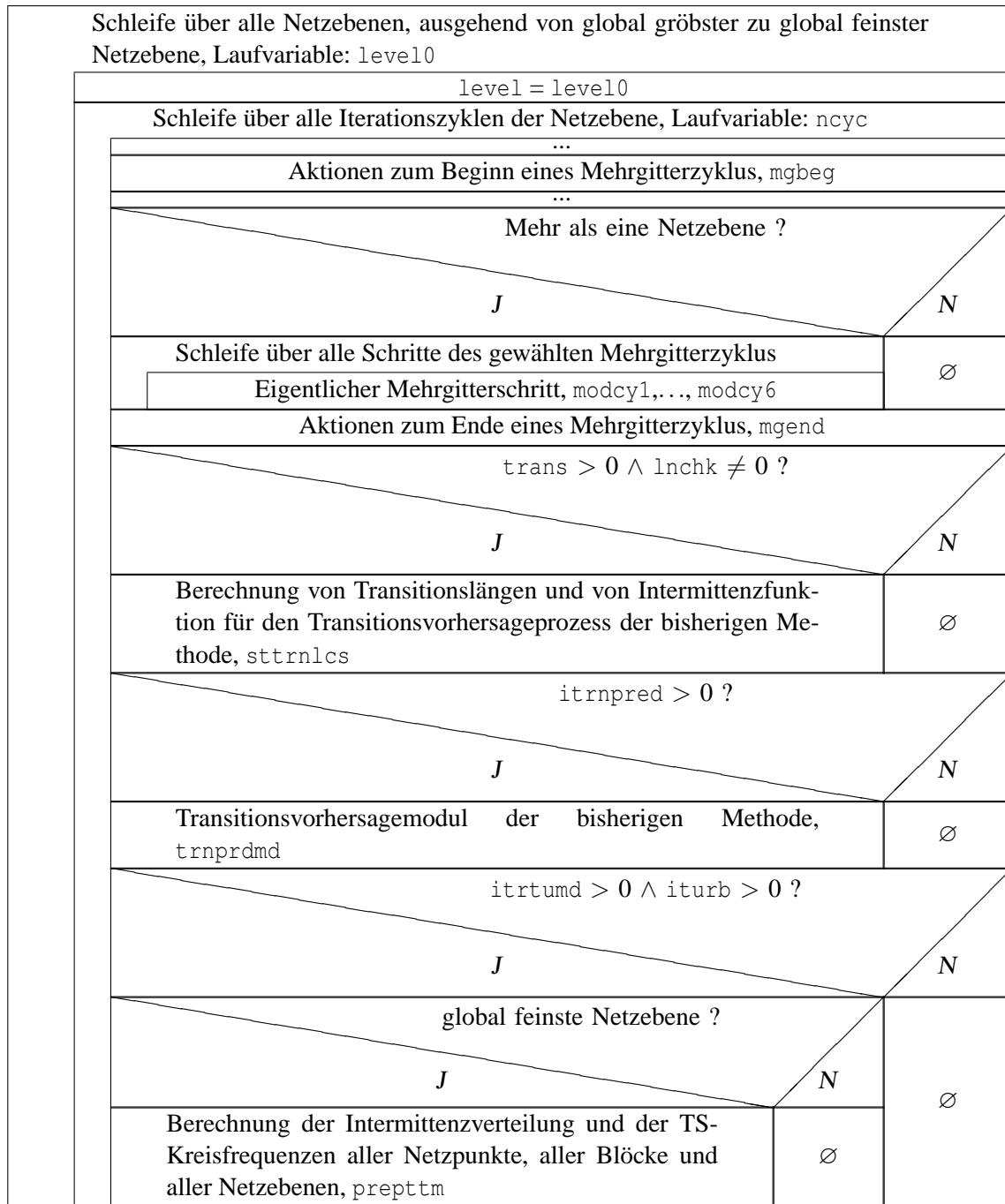


**A.2 Struktur der Routine `ingeottm`**

Überprüfung auf Übereinstimmung der Komponentennummern in log.dat und inp.dat	
Komponentennummern angegeben ?	
J	N
Warnung auf Standardausgabe ausgeben	∅
Schleife über alle Blöcke	
Schleife von feinster zu grösster Netzebene	
Korrektur blockbezogener Indizes, ldscal	
Block viskos ?	
J	N
Initialisierung der block- und ebenengebundenen Intermittenzverteilung für alle ebenenbezogenen Netzpunkte, trnstni	∅
Korrektur der Variablen level mit Wert der feinsten Netzebene	
Korrektur blockbezogener Indizes, ldscal	
Block viskos $\wedge$ nicht nur laminar ?	
J	N
Schleife über alle Komponenten	∅
Transitionssetzung entlang der Kontur der Komponente, stiltsts	
Speicherallokierung für komponentenbezogene Wandabstände	
Block viskos $\wedge$ nicht nur laminar $\vee$ Block viskos ?	
J	N
Schleife über alle Komponenten	∅
Berechnung komponentenbezogener Wandabstände, disijkxc	

Fortsetzung

Schleife über alle Blöcke		
Korrektur der Variablen <code>level</code> mit dem Wert der feinsten Netzebene		
Korrektur blockbezogener Indizes, <code>ldscal</code>		
Block viskos $\wedge$ nicht nur laminar ?		N
J		
Schleife über alle Komponenten		$\emptyset$
Übertragung komponentenbezogener Transitionssetzung ins blockbezogene Feld, <code>trpimtf</code>		
Korrektur der Variablen <code>level</code> mit dem Wert der feinsten Netzebene		
Korrektur blockbezogener Indizes, <code>ldscal</code>		
no-slip Kontur im Block ?		N
J		
Übertragung der Werte der Intermittenzverteilung physikalischer Netzpunkte auf Hilfsnetzpunkte durch Extrapolation 0. Ordnung, <code>ghoste</code>		$\emptyset$
Block viskos $\wedge$ nicht nur laminar		N
$\vee$ Block viskos ?		
J		
Schleife über alle Komponenten		$\emptyset$
Berechnung generalisierter Wandabstände, <code>disijkxcm</code>		
Schleife von feinsten zu gröbster Netzebene		
Korrektur blockbezogener Indizes, <code>ldscal</code>		
Block viskos ?		N
J		
Injektion der Intermittenzverteilung auf der feinsten Netzebene in die größeren Netzebenen für alle Netzpunkte, <code>injlts</code>		$\emptyset$
Injektion der generalisierten Wandabstände auf der feinsten Netzebene in die größeren Netzebenen für die physikalischen Netzpunkte, <code>injlts</code>		
Korrektur der Variablen <code>level</code> mit dem Wert der feinsten Netzebene		
Bedingte Speicherfreigabe des Hilfsfeldes für komponentenbezogene Wandabstände		
Korrektur der Variablen <code>level</code> mit dem Wert der feinsten Netzebene		
Aufteilung der Profilkomponenten in Ober- und Unterseite, <code>uploside</code>		

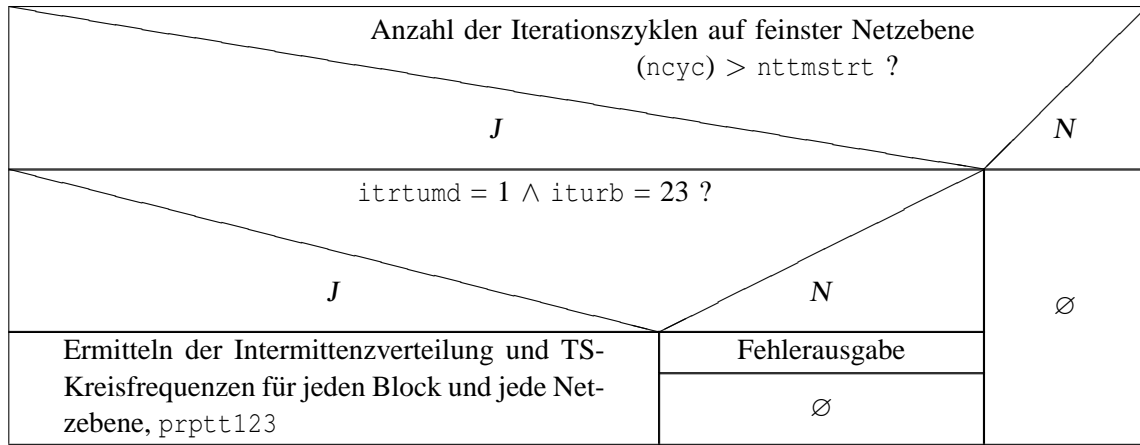
**A.3 Veränderte Struktur der Routine `solutn`**

**A.4 Veränderte Struktur der Routine `solinit`**

...		
viskose Rechnung $\wedge$ feinste Netzebene $\wedge$ turbulente Strömung ?		N
J		
Berechnung des turbulenten Anteils der Fluktuationsviskosität, <code>tufmuet</code>		∅
itrtdumd > 0 $\wedge$ ncyc > nttmstrt ?		
J		
Berechnung der Fluktuationsviskosität gemäß TT-Modellierung, <code>tufmuef</code>	∅	
...		

**A.5 Veränderte Struktur der Routine `fluxes`**

...		
1. Aufruf von rkstp $\vee$ Aufruf von fterm ?		
J		N
iturb > 0 $\wedge$ feinste Netzebene ?		
J		N
(itrtdumd > 0 $\wedge$ ncyc $\leq$ nttmstrt) $\vee$ itrtdumd = 0 ?		
J	N	$\emptyset$
Berechnung rein turbulenter Quellen, tusource	Berechnung der Quellen der TT-Modellierung, tratumso	$\emptyset$
...		

**A.6 Struktur der Routine `prepttm`**

**A.7 Struktur der Routine prptt123**

Sichern des Werts der Variablen <code>level</code>	
$ncyc = nttmstrt ?$	
$J$	$N$
Berechnung der TT-Modellkonstanten $a$ als Funktion von <code>rtmtu0</code> , <code>prpinit</code>	$\emptyset$
Schleife über die Anzahl der an der TT-Modellierung beteiligten Komponenten	
Speicher für Bogenlängen, Grenzschichtdicken und Strömungswerte am Grenzschichtrand für die betreffende Komponente allokalieren	
Schleife über alle Blöcke	
Schleife von feinsten zu gröbster Netzebene (global)	
Korrektur blockgebundener Indizes, <code>ldsca1</code>	
Initialisierung des Feldes der TS-Kreisfrequenzen, <code>stttmvar</code>	
Korrektur der Variablen <code>level</code> auf den Wert der feinsten Netzebene	
Schleife über die Anzahl der an der TT-Modellierung beteiligten Komponenten	
Ermitteln des komponentenbezogenen Staupunkts, <code>stagpnt</code>	
Bestimmung des krummlinigen Abstandes jedes Konturpunktes der Komponente zum Staupunkt, <code>gtarclen</code>	
Bestimmung der Grenzschichtdicke an jedem Konturpunkt der Komponente, <code>gtblthkn</code>	
Bestimmung der Strömungswerte für Geschwindigkeit und kinematische Viskosität am Grenzschichtrand für jeden Konturpunkt der Komponente, <code>gtfvble</code>	
Ermitteln der TS-Kreisfrequenz für jeden Konturpunkt der Komponente, <code>gttsfreq</code>	
Schleife über alle Blöcke	
Korrektur der Variablen <code>level</code> auf den Wert der global feinsten Netzebene	
Korrektur blockgebundener Indizes, <code>ldsca1</code>	
Schleife über die Anzahl der an der TT-Modellierung beteiligten Komponenten	
Übertragung der konturgebundenen Werte der TS-Kreisfrequenzen in das blockgebundene Feld, <code>trpttsff</code>	

Fortsetzung

ncyc > nttmstrt $\vee$ mod(ncyc,nttmdlt) = 0 ?	
J	N
Schleife über die Anzahl der an der TT-Modellierung beteiligten Komponenten	Ø
Übertragung der Transitionskoordinaten in krummlinigen Abstand zum komponentenbezogenen Staupunkt, trfertr	
Ermitteln der komponentenbezogenen Transitionspunkte, etracrit	
Ermitteln der komponentenbezogenen Transitionsängen, gttrrext	
Schleife über alle Blöcke	
Schleife von feinster zu größter Netzebene (global)	
Korrektur blockgebundener Indizes, ldscal	
Initialisierung der block- und ebenengebundenen Intermittenzverteilung für alle ebenenbezogenen Netzkpunkte, trnstni	
Korrektur der Variablen level auf den Wert der global feinsten Netzebene	
Schleife über die Anzahl der an der TT-Modellierung beteiligten Komponenten	
Ausgabe auf die Standardausgabe der Lage des Transitionsbeginns und Transitionsendes	
Berechnung der konturgebundenen Intermittenzverteilung für die Komponente, clcimts	
Umrechnung der Transitionsängen von Abstandswerten zum Staupunkt in globale Koordinaten, cortrco	
Schleife über alle Blöcke	
Korrektur der Variablen level auf den Wert der global feinsten Netzebene	
Korrektur blockgebundener Indizes, ldscal	

Fortsetzung

ncyc > nttmstrt $\vee$ mod(ncyc,nttmdlt) = 0 ?		
J		N
Schleife über alle Blöcke		
Korrektur der Variablen <code>level</code> auf den Wert der global feinsten Netzebene		
Korrektur blockgebundener Indizes, <code>ldscal</code>		
Block viskos $\wedge$ nicht nur laminar ?		
J		N
Schleife über alle Komponenten		Ø
Transitionssetzung für alle physikalischen Netzpunkte im ganzen Feld durch Übertragung der konturgebundenen Intermittenzverteilung in das Feld für eine Komponente, <code>trpimtf</code>		
Korrektur der Variablen <code>level</code> auf den Wert der global feinsten Netzebene		
Korrektur blockgebundener Indizes, <code>ldscal</code>		
<i>no-slip</i> Kontur im Block ?		
J	N	
Übertragung der Werte der Intermittenzverteilung physikalischer Netzpunkte auf Hilfsnetzpunkte durch Extrapolation 0. Ordnung, <code>ghoste</code>	Ø	
Schleife von feinsten zu gröbster Netzebene (global)		
Korrektur blockgebundener Indizes, <code>ldscal</code>		
Injektion der ebenengebundenen Intermittenz der global feinsten Netzebene in die größeren Netzebenen, <code>injlts</code>		



Fortsetzung

Korrektur der Variablen <code>level</code> auf den Wert der global feinsten Netzebene	
Schleife über alle Blöcke	
Korrektur der Variablen <code>level</code> auf den Wert der global feinsten Netzebene	
Korrektur blockgebundener Indizes, <code>ldscal</code>	
<i>no-slip</i> Kontur im Block ?	
<i>J</i>	<i>N</i>
Übertragung der Werte der TS-Kreisfrequenzen physikalischer Netzpunkte auf Hilfsnetzpunkte durch Extrapolation 0. Ordnung, <code>ghoste</code>	∅
Schleife von feinsten zu gröbster Netzebene (global)	
Korrektur blockgebundener Indizes, <code>ldscal</code>	
Block viskos ?	
<i>J</i>	<i>N</i>
Injektion der ebenengebundenen TS-Kreisfrequenz der global feinsten Netzebene in die gröberen Netzebenen, <code>injlts</code>	∅
Korrektur der Variablen <code>level</code> auf den aktuellen Wert innerhalb der Routine <code>solutn</code>	

## B

---

### Inversion des Widerstandsgesetzes turbulenter Strömungen

Die Funktion  $G(\Lambda; D)$  lässt sich durch asymptotische Entwicklung mit

$$G(\Lambda; D) = \left[ 1 - \frac{2 \ln \Lambda - D}{\Lambda} \left( 1 - \frac{2}{\Lambda} \right) \right]^{-1}, \quad \text{für } \Lambda \rightarrow \infty \quad (\text{B.1})$$

approximieren. Dabei wurden die Terme vernachlässigt, die für  $\Lambda \rightarrow \infty$  von höherer Ordnung klein sind. In (B.1) gilt

$$\Lambda = \ln \text{Re}_x \quad (\text{B.2})$$

und

$$D = 2 \ln C_\varkappa + C_\varkappa (C^+ + \overline{C}) = 0.04 \quad (\text{B.3})$$

mit  $\overline{C} = -0.56$ . Die vorigen Angaben sind an die Darstellungen in [12, S. 607 ff.] angelehnt. Die asymptotische Entwicklung der Funktion  $G$  ist in Abb. B.1 grafisch dargestellt.

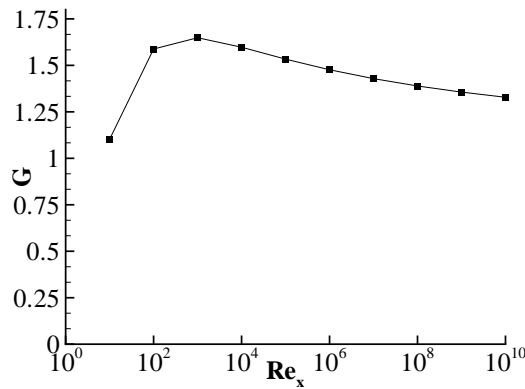


Abb. B.1. Funktion  $G(\Lambda; D)$

---

## Literatur

1. Warren, E. S., und Hassan, H. A., *An Alternative to the  $e^n$  Method for Determining Onset of Transition*, AIAA Bericht 97-0825, 1997
2. Schlichting, H., Gersten, K., *Grenzschicht-Theorie*, Springer-Verlag Heidelberg, ISBN 3-540-55744-X, 9. Auflage, 1997
3. Mack, L. M., *Transition Prediction and Linear Stability Theory*, AGARD CP-224, 1977, S. 1-1–1-22
4. Herbert, T., *Parabolized Stability Equations*, AGARD Rept. 794, 1993
5. Young, T. W., Warren, E. S., Harris, J. E., und Hassan, H. A., *New Approach for the Calculation of Transitional Flows*, AIAA Journal, Bd. 31, Nr. 4, 1993, S. 629-636
6. Schubauer, G. B., und Klebanoff, P. S., *Contributions on the Mechanics of Boundary-Layer Transition*, NACA Rept. 1289, 1956
7. McKeel, S. A., *Numerical Simulation of the Transition Region in Hypersonic Flow*, Dissertation, Universität Virginia, Vereinigte Staaten von Amerika, 1996
8. Blasius, H., *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Z. Math. Physik, Bd. 58, 1-37, Engl. Übersetzung in NACA-TM-1256, 1908
9. Mack, L. M., *Linear Stability Theory and the Problem of Supersonic Boundary-Layer Transition*, AIAA Journal, Bd. 13, Nr. 3, 1975, S. 278-289
10. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1974
11. Morkovin, M. V., *Effects of Compressibility on Turbulent Flow*, The Mechanics of Turbulence, Gordon und Breach, New York, 1964
12. Gersten, K., Herwig, H., *Strömungsmechanik — Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1992
13. Wilcox, D. C., *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, Inc., 1994
14. Dhawan, S., und Narasimha, R., *Some Properties of Boundary Layer Flow during the Transition from Laminar to Turbulent Motion*, Journal of Fluid Mechanics, Bd. 3, Nr. 4, 1958, S. 402 ff.
15. Cebeci, T., und Smith, A. M. O., *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Academic Press, New York, 1974
16. Walker, G. J., *Transitional Flow on Axial Turbomachine Blading*, AIAA Journal, Bd. 27, Nr. 5, 1989, S. 595-602
17. McCormick, M. E., *An Analysis of the Formation of Turbulent Patches in the Transition Boundary Layer*, Journal of Applied Mechanics, Bd. 35, 1968, S. 216-219
18. Warren, E. S., Hassan, H. A., *Transition Closure Model for Predicting Transition Onset*, Journal of Aircraft, Bd. 35, Nr. 5, 1998
19. Robinson, D. F., Harris, J. E., und Hassan, H. A., *Unified Turbulence Closure Model for Axisymmetric and Planar Free Shear Flows*, AIAA Journal, Bd. 33, Nr. 12, 1995
20. Edwards, J. R., Roy, C. J., Blottner, F. G., und Hassan, H. A., *Development of One-Equation Transition/Turbulence Models*, AIAA Paper 2000-0133, 2000
21. McDaniel, R. D., Nance, R. P., und Hassan, H. A., *Transition Onset Prediction for High Speed Flow*, AIAA Paper 99-3792, 1999
22. Stock, H. W., und Haase, W., *Feasibility Study of  $e^n$  Transition Prediction in Navier-Stokes Methods for Airfoils*, AIAA Journal, Bd. 37, Nr. 10, 1999
23. Kroll, N., et al., *FLOWer – Installation and User Handbook*, Ausgabe 116, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V., Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Numerische Verfahren, 2000
24. Kroll, N., et al., *FLOWer – Architectural Design Handbook*, Ausgabe 116, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V., Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Numerische Verfahren, 2000

25. Opitz, K., *Numerische Untersuchung zweidimensionaler, laminar-turbulenter Profilumströmungen und der Auswirkung der Transition auf integrale Kraftbeiwerte*, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V., Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Numerische Verfahren, Institutsbericht IB 124-2002/09, März 2002
26. Fassbender, J. K., *Improved Robustness for Numerical Simulation of Turbulent Flows around Civil Transport Aircraft at Flight Reynolds Numbers*, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V., Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Numerische Verfahren, Forschungsbericht 2003-09, 2003
27. Hänel, D., *Mathematische Strömungslehre*, Skript zur Vorlesung, Aerodynamisches Institut, RWTH Aachen, 2000
28. Choi, Y.-H., und Merkle, C. L., *The Application of Preconditioning to Viscous Flows*, Journal of Computational Physics, Bd. 105, 1993, S.207-223
29. Somers, D. A., *Design and Experimental Results for a Natural-Laminar Flow Airfoil for General Aviation Applications*, NASA Technical Paper 1861, Scientific and Technical Information Branch, 1981

---

## Index

### Parameter

BCV, [80](#)  
CHDISL, [58](#)  
CMPCOR, [49](#)  
CMPTTM, [55](#), [55](#)  
CRITYPE, [53](#), [56](#), [59](#)  
DACTKPL, [59](#), [104](#)  
DACTOPL, [59](#)  
DISLIM, [58](#), [63](#), [64](#), [65](#), [75](#), [77](#), [88](#), [108](#)  
ILEN, [61](#), [61](#), [62](#)  
IPREC, [80](#)  
ITLNS, [80](#)  
ITRNPRED, [60](#), [62](#)  
ITRTUMD, [52](#), [54](#), [55](#), [56](#), [60](#)  
ITTMOUT, [56](#)  
ITURB, [48](#), [54](#), [56](#), [56](#), [57](#), [65](#), [108](#)  
KPRDLIM, [59](#), [104](#)  
LIMBLT, [58](#)  
NAVGN, [59](#), [60](#), [101](#)  
NAVGTSLD, [58](#), [58](#), [60](#), [101](#)  
NPARTPRD, [60](#), [60](#), [62](#)  
NPARTS, [54](#), [62](#), [64](#)  
NPRED, [61](#), [61](#)  
NSFTTM, [57](#), [59](#), [89](#)  
NSMCMPPT, [53](#), [55](#), [60](#), [61](#)  
NTRAN, [63](#), [64](#)  
NTTMDLT, [53](#), [55](#), [101](#)  
NTTMSTRT, [52](#), [53](#), [55](#), [55](#), [73](#)  
OLDTURB, [53](#), [57](#), [57](#)  
OPRDLIM, [59](#)  
PRDCONV, [62](#)  
PRED, [62](#)  
RLTU, [83](#)  
RTTMTU0, [54](#), [56](#), [73](#)  
SSRCHMG, [58](#), [60](#), [73](#)  
TRANS, [60](#), [60](#), [95](#), [99](#)  
TRMETH, [63](#), [63](#), [64](#), [76](#), [77](#)  
TU0, [54](#), [57](#), [83](#)  
XTRAN, [63](#), [63](#), [64](#)  
XTRANL, [63](#), [63](#), [64](#)  
XTRANU, [63](#), [63](#), [64](#)

YTRAN, [63](#), [63](#), [64](#)

ZTRAN, [63](#), [63](#), [64](#)

### Routinen

bcondfm, [49](#)  
chinpttm, [52](#)  
clcimts, [77](#)  
cmprsbty, [49](#), [71](#)  
comcntl, [48](#)  
compointer, [49](#)  
cortrco, [77](#)  
defattm, [52](#)  
disijkxc, [65](#)  
disijkxcm, [66](#)  
etracrit, [76](#)  
filter, [49](#), [51](#)  
flower, [45–47](#)  
flux, [49](#)  
fluxes, [49](#), [51](#), [52](#), [68](#), [70](#)  
fluxv, [49](#), [51](#)  
fluxvns, [49](#)  
fluxvtl, [49](#)  
fterm, [51](#)  
ghoste, [66](#), [77](#)  
gtarclen, [73](#)  
gtblthkn, [74](#)  
gtfvble, [75](#), [76](#)  
gttrext, [76](#)  
gttsfreq, [73](#), [75](#)  
ingeottm, [52](#), [64](#), [66](#)  
initgeom, [64](#)  
initial, [45](#), [52](#), [64](#)  
injectdl, [66](#)  
injlts, [66](#), [77](#)  
inpttm, [52](#)  
input, [45](#), [52](#)  
mgbeg, [45](#), [46](#)  
mgend, [46](#)  
modcy1, [46](#)  
modcy6, [46](#)  
omk123, [71](#)

omknt123, 71  
 output, 45  
 prepttm, 52  
 protu1, 49  
 protu2, 49, 71  
 prpinit, 73  
 prptt123, 52, 74  
 readinp, 52  
 rkstp, 47, 49, 51  
 sdchk, 66, 73  
 sodsp123, 71  
 solinit, 47, 52, 68, 69  
 solipar, 47  
 solutn, 45, 46, 52, 68, 72  
 source23, 49, 50, 70  
 stagpnt, 60, 73  
 step, 46  
 step2, 46–48  
 step2a, 46  
 step4, 46, 51  
 stiltsts, 65  
 sttrnlcs, 61  
 stttmvar, 73  
 tratumso, 71, 73  
 trfertr, 76  
 trnprmd, 60  
 trnstni, 65, 76  
 trpimtf, 77  
 trptimtf, 65  
 trpttsff, 75  
 ttl123, 69  
 ttmfmnt123, 70  
 ttmfmuef, 69  
 ttmfmunt, 69  
 ttmlttr, 69  
 ttmnt123, 69  
 ttsol123, 71  
 tufmuef, 73

tufmuet, 47, 52, 68  
 turb, 48  
 turb23, 48, 50, 69  
 tusource, 49, 52, 70, 71  
 tustdsdw, 49  
 uplo1, 66, 67  
 uplo2, 67  
 uplo3, 67  
 uplo4, 67  
 uplo5, 66, 67  
 uploside, 60, 61, 66, 73  
 viscos, 47

#### Speicherfelder

cep2c, 50  
 cmuturc, 50  
 fmuent, 69  
 fmuet, 49, 50, 69, 71  
 iipisrtd, 76  
 istri, 76  
 ltflag, 70  
 rdivq, 49, 71  
 rstra, 49, 71  
 ttmvmem, 52, 69, 70  
 xlen1, 76  
 xlenu, 76

#### Zeiger

ipcep2, 50  
 ipcmutur, 50  
 ipfmuet (mbl, level), 48  
 ipltflag (mbl, level), 70  
 ipnuble, 76  
 iprdivq, 49  
 iprstra, 49  
 ipttmvmem, 69  
 ipttmvmem (mbl, level), 69  
 ipvelble, 76

IB 124-2004/15

**Anwendung eines Transitions-/Turbulenzmodells zur  
numerischen Simulation von Strömungen mit Transition**

**Lars Reimer**

**Verteiler:**

Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik	1 Exemplar
Prof. Dr.-Ing. C.-C ROSSOW	1 Exemplar
Dr.-Ing. G. REDEKER	1 Exemplar
Dr.-Ing. K.H. HORSTMANN	1 Exemplar
Dr.-Ing. R. RUDNIK	1 Exemplar
Prof. Dr.-Ing. J. DELFS	1 Exemplar
Dr.-Ing. J. LONGO	1 Exemplar
Prof. Dr.-Ing. N. KROLL	1 Exemplar
Dr.-Ing. D. SCHWAMBORN	1 Exemplar
Prof. Dr.-Ing R. RADESPIEL, ISM, TU-BS	1 Exemplar
Verfasser	1 Exemplar
Bibliothek BS	1 Exemplar
Reserve	<u>5 Exemplare</u>
	17 Exemplare